

CENTRO UNIVERSITÁRIO FEI

VINICIUS ISHIMOTO CUERVA

**CONTROLE DA LOCOMOÇÃO ASSISTIDA DE CADEIRAS DE RODAS MANUAIS  
POR MEIO DO CONTROLE DE IMPEDÂNCIA: análise via controle ótimo**

São Bernardo do Campo

2017



VINICIUS ISHIMOTO CUERVA

**CONTROLE DA LOCOMOÇÃO ASSISTIDA DE CADEIRAS DE RODAS MANUAIS  
POR MEIO DO CONTROLE DE IMPEDÂNCIA: análise via controle ótimo**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Centro Universitário da FEI para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, orientado pelo Prof. Dr. Fabrizio Leonardi.

São Bernardo do Campo

2017

Cuerva, Vinicius Ishimoto.

Controle da locomoção assistida de cadeiras de rodas manuais por meio do controle de impedância: análise via controle ótimo / Vinicius Ishimoto Cuerva. São Bernardo do Campo, 2017.

182 p. : il.

Dissertação - Centro Universitário FEI.

Orientador: Prof. Dr. Fabrizio Leonardi.

1. Controle de impedância. 2. Controle ótimo. 3. Mobilidade assistida.  
4. Cadeira de rodas. I. Leonardi, Fabrizio, orient. II. Título.

**Aluno:** Vinícius Ishimoto Cuerva

**Matrícula:** 215137-1

**Título do Trabalho:** Controle da locomoção assistida de cadeiras de rodas manuais por meio do controle de impedância: análise via controle ótimo.

**Área de Concentração:** Sistemas da Mobilidade

**Orientador:** Prof. Dr. Fabrizio Leonardi

**Data da realização da defesa:** 23/02/2017

**ORIGINAL ASSINADA**

**Avaliação da Banca Examinadora:**

---

---

---

---

---

---

---

---

São Bernardo do Campo, 23 / 02 / 2017.

**MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Fabrizio Leonardi Ass.: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Fuad Kassab Junior Ass.: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Olavo Luppi Silva Ass.: \_\_\_\_\_

A Banca Julgadora acima-assinada atribuiu ao aluno o seguinte resultado:

APROVADO

REPROVADO

**VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO**

**APROVO A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO EM QUE  
FORAM INCLUÍDAS AS RECOMENDAÇÕES DA BANCA  
EXAMINADORA**

Aprovação do Coordenador do Programa de Pós-graduação

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rodrigo Magnabosco



À todas as pessoas que possam, de alguma forma, serem auxiliadas por este trabalho na sua vida ou em pesquisas acadêmicas futuras.





## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram a concluir este trabalho; professores, colegas de turma, a própria instituição e familiares. Agradeço também a CAPES por me conceder uma bolsa de estudos.



## RESUMO

A movimentação assistida é um tópico crescente no ramo de pesquisa devido ao envelhecimento geral da população mundial e crescente número de pessoas com deficiências motoras. Dentre as soluções no leque de opções, a cadeira de rodas é o meio mais escolhido, principalmente por sua versatilidade e manuseabilidade porém, esta possui rendimento energético baixo que pode trazer problemas de fadiga e distensões nos músculos dos membros superiores. Por esse problema, é crescente a pesquisa em sistemas "híbridos" onde o paciente ainda precisa usar de sua força física com o auxílio de um aparato eletro-mecânico para reduzir o esforço físico e evitar lesões, mantendo sua versatilidade e manuseabilidade que dispositivos totalmente automáticos comumente não tem. A interação entre pessoa e máquina presente nesse tipo de sistema deve ser feita com precaução a fim de evitar impor esforços físicos no operador que podem causar lesões. Uma das formas mais comuns estudadas na literatura científica de obter essa interação é a criação de uma "resistência mecânica" virtual no sistema pessoa + assistência criando uma relação entre forças e velocidades. A esta forma de comando é dado o nome "controle de impedância". O controle de impedância consiste em fixar a relação entre forças aplicadas com a cinemática de resposta do sistema dinâmico controlado de forma a agir conforme um modelo dinâmico de referência especificado. Nesta pesquisa pretende-se investigar como um sistema por controle de impedância pode ser aplicado a uma cadeira de rodas motorizada para assistência na locomoção longitudinal e sua avaliação através de controle ótimo. A dissertação envolverá a definição e projeto do controle de impedância e os métodos utilizados de controle ótimo para avaliar os esforços da pessoa em comparação a cadeira de rodas manual.

Palavras-chave: Controle de impedância. Controle ótimo. Mobilidade assistida. Cadeira de rodas.



## **ABSTRACT**

Assisted mobility is a growing topic in the research branch due to global aging and the increasing number of people with disabilities. In the range of options for people with disability in the lower limbs, the wheelchair is one of the most popular means of assistance, mainly due to its versatility and handling. However, it has a low efficient propulsion, which could bring problems of fatigue and muscle strains in the upper limbs. Because of this problem, research into “hybrid” systems is becoming common. In this kind of system, the patient still needs to use his physical strength but, is aided by an electro-mechanical device to reduce physical effort and avoid injury, while maintaining its versatility and handling that fully automatic devices usually doesn't have. The interaction between man and machine present in this type of system should be made with caution in order to avoid imposing excessive physical efforts on the operator. One of the most common ways in the scientific literature to obtain this interaction is to create a virtual “resistance” in the person + assistance system by creating a relationship between forces and velocities. To this kind of control is given the name “impedance control”. The impedance control consists in fixing the relation between external forces with the kinematics of the controlled dynamic system in order to act according to a specified dynamic model of reference. This research intends to propose an impedance control applied to a motorized wheelchair for assistance in longitudinal propulsion and an evaluation through optimal control. The dissertation will involve the definition and design of the impedance control and the optimal control formulation used to evaluate the efforts of the person compared to manual wheelchair.

**Keywords:** Impedance control. Optimal control. Assisted mobility. Wheelchair.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Prótese de um dedo do pé encontrada no antigo Egito, em exposição no museu do Cairo. . . . .	37
Figura 2 – Cadeira de rodas de Harry Jennings . . . . .	38
Figura 3 – Cadeira de rodas do tipo PAPA W . . . . .	40
Figura 4 – Diagrama de um sistema de controle por impedância típico . . . . .	43
Figura 5 – Padrões de trajeto da mão para a propulsão de cadeira de rodas manuais. . . . .	46
Figura 6 – Diagrama de blocos do sistema com modelo de referência. . . . .	50
Figura 7 – Diagrama de blocos da realimentação por estados. . . . .	51
Figura 8 – Diagrama de blocos do sistema com modelo de referência. . . . .	52
Figura 9 – Comparação entre os resultados simulados e medidos. . . . .	64
Figura 10 – Diagrama da assistência por impedância. . . . .	68
Figura 11 – Posições ótimas para os três casos de assistência. . . . .	70
Figura 12 – Velocidades ótimas para os três casos de assistência. . . . .	70
Figura 13 – Força do usuário ótimas para os três casos de assistência. . . . .	71
Figura 14 – Força do motor ótimas para os três casos de assistência. . . . .	71
Figura 15 – Modelo destacando os movimentos de barras do sistema. . . . .	73
Figura 16 – Modelo de quatro barras. . . . .	74
Figura 17 – Diagrama de blocos do sistema mecânico da cadeira de rodas. . . . .	78
Figura 18 – Diagrama de blocos em malha fechada da cadeira de rodas assistida. . . . .	80
Figura 19 – Variação na Inércia para um conjunto de parâmetros. . . . .	80
Figura 20 – Modelo do motor elétrico usado no trabalho. . . . .	82
Figura 21 – Resposta em frequência esperada do sistema dinâmico . . . . .	84
Figura 22 – Dados da velocidade mensurada e simulada em função da força aplicada pela pessoa em velocidade confortável. . . . .	85
Figura 23 – Comparação entre as forças de contato simuladas. . . . .	92
Figura 24 – Integração das acelerações calculadas usando os parâmetros obtidos por controle ótimo. . . . .	93
Figura 25 – Comparação entre os estados do erro . . . . .	97
Figura 26 – Sistema de quatro barras nos extremos de variação da fase de propulsão . . . . .	98
Figura 27 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	104
Figura 28 – Simulação de comparação entre modelos em regime permanente . . . . .	105
Figura 29 – Comparação da velocidade estimada do modelo de primeira ordem em relação ao de quatro barras para a velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	106
Figura 30 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada para a velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total	107





Figura 31 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	108
Figura 32 – Comparação entre velocidades reais e aproximadas para as simulações de corrida energética com 0,9 m/s de velocidade média . . . . .	110
Figura 33 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	111
Figura 34 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	112
Figura 35 – Comparação da velocidade estimada de primeira ordem em relação ao modelo de quatro barras para a velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	113
Figura 36 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada para a velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total	114
Figura 37 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	115
Figura 38 – Comparação entre velocidades reais e aproximadas para as simulações de corrida energética com 1,8 m/s de velocidade média . . . . .	116
Figura 39 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	117
Figura 40 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para a velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente . . . . .	118
Figura 41 – Comparação da velocidade estimada de primeira ordem em relação ao modelo de quatro barras para a velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente	119
Figura 42 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada em velocidade média de 0,9 m/s e regime permanente . . . . .	120
Figura 43 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente . . . . .	121
Figura 44 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 0,9 m/s em regime permanente. . . . .	121
Figura 45 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para a velocidade média de 1,8 m/s em regime permanente . . . . .	122
Figura 46 – Comparação da velocidade estimada de primeira ordem em relação ao modelo de quatro barras para a velocidade média de 1,8 m/s em regime permanente	123
Figura 47 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada em velocidade média de 1,8 m/s e regime permanente . . . . .	124
Figura 48 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 1,8 m/s em regime permanente . . . . .	125
Figura 49 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 1,8 m/s em regime permanente. . . . .	125



Figura 50 – Modelo destacando os movimentos de barras do sistema. . . . .	162
Figura 51 – Modelo de quatro barras com a representação das variáveis generalizadas. . .	163
Figura 52 – Forças atuantes no antebraço. . . . .	163
Figura 53 – Forças atuantes no braço. . . . .	164
Figura 54 – Forças atuantes nas rodas traseiras da cadeira. . . . .	165
Figura 55 – Inércia combinada da estrutura da cadeira de rodas com as partes paradas da pessoa. . . . .	166
Figura 56 – Discretização temporal de um estado e controle típico . . . . .	174
Figura 57 – Exemplo de aproximação polinomial por vários polinômios de menor ordem	176



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados encontrados para o caso de assistência constante. . . . .	69
Tabela 2 – Resultados encontrados para o caso de assistência proporcional. . . . .	69
Tabela 3 – Resultados encontrados para o caso de assistência por impedância. . . . .	69
Tabela 4 – Dados de massa, inércia e biométricos da pessoa . . . . .	101
Tabela 5 – Parâmetros da cadeira de rodas . . . . .	102
Tabela 6 – Parâmetros do motor . . . . .	102
Tabela 7 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	104
Tabela 8 – Parâmetros utilizados no modelo de atrito. . . . .	109
Tabela 9 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total . . . . .	112
Tabela 10 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 0,9 m/s em regime . . . . .	118
Tabela 11 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 1,8 m/s em regime . . . . .	123
Tabela 12 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ por impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	129
Tabela 13 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	130
Tabela 14 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	131
Tabela 15 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ por impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	131
Tabela 16 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	132
Tabela 17 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m. . . . .	133
Tabela 18 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ por impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente. . . . .	134
Tabela 19 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente. . . . .	135
Tabela 20 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente. . . . .	135
Tabela 21 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ por impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente. . . . .	136
Tabela 22 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente. . . . .	137



Tabela 23 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente. . . . .	138
Tabela 24 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento. . . . .	141
Tabela 25 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento. . . . .	142
Tabela 26 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento. . . . .	143
Tabela 27 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s com 2 m de deslocamento. . . . .	144
Tabela 28 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s com 2 m de deslocamento. . . . .	144
Tabela 29 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s com 2 m de deslocamento. . . . .	145
Tabela 30 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente. . . . .	146
Tabela 31 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente. . . . .	146
Tabela 32 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente. . . . .	147
Tabela 33 – Relação de funções objetivo $S^{(1)}$ em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente. . . . .	147
Tabela 34 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente. . . . .	148
Tabela 35 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente. . . . .	149
Tabela 36 – Dados do computador utilizado . . . . .	182





## LISTA DE ABREVIATURAS

<b>ARX</b>	Modelo Autoregressivo com entrada exógena.
<b>BLDC</b>	<i>BrushLess Direct Current Motor.</i>
<b>IBGE</b>	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.
<b>IPOPT</b>	<i>Interior Point Optimizer.</i>
<b>IV</b>	Variáveis Instrumentais.
<b>KKT</b>	<i>Karush-Kunh-Tucker.</i>
<b>LTI</b>	<i>Linear Time Invariant.</i>
<b>MRAC</b>	<i>Model Reference Adaptive Control.</i>
<b>NRMSE</b>	Função Custo da Raiz Quadrada do Erro Médio Normalizado.
<b>PAPAW</b>	<i>Pushrim activated power wheelchair.</i>
<b>SMC</b>	Controle por Modos Deslizantes.
<b>SNOPT</b>	<i>Sparse Nonlinear Optimizer.</i>
<b>SQP</b>	Programação Quadrática Sequencial.
<b>TMA</b>	Teorema do momento angular.
<b>TMB</b>	Teorema do movimento do baricentro.



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras latinas

$\mathfrak{A}$	Jacobiana do polinômio de Legendre.
$\mathcal{B}$	Inequação de limitação do problema de controle ótimo.
$b$	Coefficiente de atrito dinâmico do sistema dinâmico.
$c$	Função de limitação dinâmica.
$\mathbf{c}$	vetor de restrições cinemáticas.
$\mathcal{D}$	Matrix de diferenciação.
$e$	Erro.
$f$	Forças aplicadas sob o sistema.
$f_{ext}$	Força externa.
$v_{real}$	Velocidade real do sistema mecânico.
$\mathbf{g}$	Gradiente da função objetivo.
$h$	Funções auxiliares.
$H$	Matriz hessiana.
$\mathcal{I}$	Matrix de integração.
$I$	Corrente elétrica.
$\mathcal{J}$	Função objetivo do problema de otimização.
$j$	Inercia.
$J$	Matriz jacobiana.
$k$	Variáveis dinâmicas no sistema matricial dinâmico.
$k_e$	Vetor de forças generalizadas de Coriolis.
$\mathcal{L}$	Função Lagrangiana.
$l$	Ordem do polinômio de Legendre.
$\mathcal{L}$	Polinômio de Lagrange.
$m$	Massa.
$\mathfrak{P}$	Polinômio de Legendre.
$p$	Parâmetros do sistema biomecânico.
$\mathbf{q}$	Vetor de coordenadas generalizadas do sistema mecânico ca-deira de rodas/usuário.
$R$	Fator de proximidade entre o modelo e o sinal medido.
$r$	Raio das rodas traseiras.
$r_2$	Raio dos raios de tração.
$rt$	Relação de transmissão.
$t$	Tempo.
$u$	Variável de controle.
$v$	Velocidade do sistema dinâmico.
$V$	Diferença de potencial no motor.



<b>V</b>	Matriz das velocidades e forças medidas da cadeira..
$w$	Pesos dos pontos no Polinômio de Legendre.
$x$	Variável de estado.
$y$	Deslocamento longitudinal da cadeira de rodas.
<b>z</b>	Vetor de estados e controles.

### Letras gregas

$\alpha$	Deslocamento angular do antebraço em relação a vertical.
$\beta$	Deslocamento angular do braço em relação a vertical.
$\varepsilon$	Erro de malha.
$\eta$	Ângulo de rampa.
$\gamma$	Pontos de malha.
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange.
$\Omega$	Vetor de funções do espaço de estados.
$\omega$	Velocidade Angular.
$\Phi$	Função de limitação pontual da Lagrangiana.
$\Psi$	Função dinâmica da lagrangiana.
$\tau$	Pontos da função de Legendre.
$\tau$	Torque.
$\tau_1$	Torque aplicado no ombro.
$\tau_2$	Torque aplicado no cotovelo.
$\theta$	Deslocamento angular das rodas traseiras.
$\theta_0$	Angulo inicial das rodas traseiras.
$\varpi$	Vetor de parâmetros do modelo da cadeira..
$\Xi$	Pesos da função de barreira.

### Lista de índices

<b>o</b>	Índice inicial.
<b>b</b>	Número de restrições por inequação.
<b>c</b>	Número de restrições por igualdade.
<b>d</b>	Número de pontos discretos.
<b>f</b>	Índice final.
<b>h</b>	Índice relativo a pessoa.
<b>i</b>	Índice de linha.
<b>j</b>	Índice de coluna.
<b>ℓ</b>	Índice relativo ao motor.
<b>m</b>	Pontos de colocação.
<b>n</b>	Número de estados.
<b>p</b>	Número de controles.
<b>q</b>	Número de malhas do problema de controle ótimo.
<b>r</b>	Relativo ao modelo de referência..



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	33
1.1	OBJETIVO	34
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO	34
1.3	NORMAS USADAS NO TEXTO	35
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	37
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	49
3.1	CONTROLE DE IMPEDÂNCIA	49
3.2	CONTROLE ÓTIMO	52
3.3	DIFERENCIAÇÃO AUTOMÁTICA	59
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	61
4.1	ANALISE DAS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE ASSISTÊNCIA	62
<b>4.1.1</b>	<b>Parâmetros do modelo</b>	62
<b>4.1.2</b>	<b>Implementação de controle ótimo</b>	63
<b>4.1.3</b>	<b>Descrição das assistências</b>	66
<i>4.1.3.1</i>	<i>Assistência constante</i>	66
<i>4.1.3.2</i>	<i>Assistência proporcional</i>	67
<i>4.1.3.3</i>	<i>Assistência por controle de impedância</i>	67
<b>4.1.4</b>	<b>Resultados</b>	68
4.2	MODELAGEM DA CADEIRA DE RODAS	72
4.3	DESENVOLVIMENTO DO CONTROLADOR	76
<b>4.3.1</b>	<b>Modelo do controlador</b>	77
<b>4.3.2</b>	<b>Modelo de referência</b>	84
<i>4.3.2.1</i>	<i>Métodos de identificação</i>	86
<i>4.3.2.2</i>	<i>Avaliação dos métodos de identificação</i>	87
<b>4.3.3</b>	<b>Planejamento das simulações</b>	88
4.4	FORMULAÇÃO DE CONTROLE ÓTIMO	89
<b>4.4.1</b>	<b>Condições dinâmicas de malha aberta</b>	90
<b>4.4.2</b>	<b>Condições dinâmicas de malha fechada</b>	95
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	101
5.1	PARÂMETROS UTILIZADOS	101
5.2	EFEITO DA NÃO LINEARIDADE	103
<b>5.2.1</b>	<b>Corrida energética</b>	103
<i>5.2.1.1</i>	<i>Velocidade de 0,9 m/s</i>	103
<i>5.2.1.2</i>	<i>Velocidade de 1,8 m/s</i>	111
<b>5.2.2</b>	<b>Regime permanente</b>	117
<i>5.2.2.1</i>	<i>Velocidade de 0,9 m/s</i>	117
<i>5.2.2.2</i>	<i>Velocidade de 1,8 m/s</i>	122





5.2.3	<b>Discussão</b> . . . . .	126
5.3	<b>EFEITO DA VARIAÇÃO DE IMPEDÂNCIA</b> . . . . .	127
5.3.1	<b>Corrida energética</b> . . . . .	129
5.3.1.1	<i>Velocidade de 0,9 m/s</i> . . . . .	129
5.3.1.2	<i>Velocidade de 1,8 m/s</i> . . . . .	131
5.3.2	<b>Regime permanente</b> . . . . .	133
5.3.2.1	<i>Velocidade de 0,9 m/s</i> . . . . .	133
5.3.2.2	<i>Velocidade de 1,8 m/s</i> . . . . .	136
5.3.3	<b>Discussão</b> . . . . .	138
5.4	<b>EFEITO DA VARIAÇÃO DE ANTROPOMETRIA</b> . . . . .	140
5.4.1	<b>Corrida energética</b> . . . . .	141
5.4.1.1	<i>Velocidade de 0,9 m/s</i> . . . . .	141
5.4.1.2	<i>Velocidade de 1,8 m/s</i> . . . . .	143
5.4.2	<b>Regime permanente</b> . . . . .	145
5.4.2.1	<i>Velocidade de 0,9 m/s</i> . . . . .	145
5.4.2.2	<i>Velocidade de 1,8 m/s</i> . . . . .	147
5.4.3	<b>Discussão</b> . . . . .	148
6	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	151
6.1	<b>TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	152
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	153
	<b>APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE QUATRO BARRAS</b> . . . . .	161
A.1	<b>ANTEBRAÇO</b> . . . . .	163
A.2	<b>BRAÇO</b> . . . . .	164
A.3	<b>RODAS TRASEIRAS</b> . . . . .	165
A.4	<b>ESTRUTURA E PESSOA</b> . . . . .	165
A.5	<b>MODELO COM ESCORREGAMENTO</b> . . . . .	170
	<b>APÊNDICE B – QUADRATURA DE LEGENDRE-GAUSS</b> . . . . .	173
B.1	<b>CÁLCULO DO ERRO DE MALHA</b> . . . . .	179
	<b>APÊNDICE C – DETALHES COMPUTACIONAIS</b> . . . . .	181



## 1 INTRODUÇÃO

Segundo a OMS (2011), cerca de 15% da população mundial possui algum tipo de deficiência. Com o crescente envelhecimento da população, esse número só tende a aumentar pois pessoas mais idosas possuem uma tendência maior a ter lesões e doenças crônicas (OMS, 2011).

No Brasil, o censo demográfico de 2010 lançado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) demonstra que 23,9% da população declara ter algum tipo de deficiência no qual aproximadamente 31%, ou cerca de 14 milhões de pessoas, possuem deficiência de caráter motor (IBGE, 2010). Segundo o IBGE (2000), 10% das pessoas entrevistadas que declararam ter algum tipo de deficiência motora são paraplégicas, tetraplégicas ou hemiplégicas.

Para as pessoas com deficiência nos membros inferiores, a cadeira de rodas é o meio mais popular de assistência, principalmente entre pessoas que perderam completamente os movimentos destes e que querem ter independência em suas ações diárias (ALONSO et al., 2011). Embora seja um meio de transporte bem comum e difundido, a cadeira de rodas possui baixa eficiência mecânica e, somado ao fator repetitivo do movimento de propulsão da mesma, grande parte de seus usuários desenvolvem lesões nas juntas superiores devido à fadiga (Marieke G.M. KLOOSTERMAN et al., 2015).

Uma possível solução para esse problema seria o uso de meios para locomoção totalmente automatizados, onde o deficiente não precisa desenvolver nenhum tipo de esforço físico para se locomover e nutrir independência em suas atividades diárias. Porém, esse tipo de equipamento geralmente é de difícil transporte além de possuir maior massa em relação a cadeira de rodas convencional (HEO; HONG; MUN, 2013). Embora existam soluções que tentam contornar tais problemas, como desenvolver os motores da cadeira de rodas elétrica nos cubos das rodas traseiras, mantendo um sistema dobrável similar ao de cadeiras de rodas manual (HOS-SAIN et al., 2013), essas soluções tornam a vida do usuário muito sedentária, o que pode piorar a sua saúde e condicionamento físico (COOPER et al., 2002 apud L. H. v. d. WOUDE; GROOT; JANSSEN, 2006).

Por esses motivos, é crescente o interesse por cadeira de rodas com assistência parcial, comumente chamadas de *Pushrim activated power wheelchair* (PAPAW) (do inglês, Cadeira de rodas com potência assistida pelo aro de propulsão) pois estes meios de transporte tentam manter a pessoa ativa em termos de condicionamento físico, sem causar lesões por repetição de movimentos ou excesso de força aplicada, mantendo um nível aceitável de comodidade na utilização do dia a dia (GUILLON et al., 2015).

O sistema de controle de uma PAPAW geralmente é muito simples, envolvendo uma força constante ativada por um sensor no aro de tração da cadeira de rodas ou um simples multiplicador da força aplicada pelo cadeirante. Esse tipo de sistema é bem útil para percorrer longas distâncias, principalmente em lugares abertos onde não há a presença de muitos obstáculos. Porém, possui algumas deficiências quando é exigido um melhor controle na movimentação da

cadeira de rodas, podendo ter resultados piores que de uma cadeira de rodas manual em lugares fechados e de pouco espaço por não ser muito intuitiva ao usuário (GUILLON et al., 2015). Em tais situações, muitas vezes, o usuário prefere o uso da cadeira de rodas manual em relação a assistida (M. G. KLOOSTERMAN et al., 2013).

Alguns trabalhos acadêmicos propõem soluções para esses problemas, principalmente os causados pela gravidade, como no movimento em rampas longitudinais (HWANG; C.-H. LEE; BANG, 2012) ou transversais (CHUGO et al., 2015) em relação cadeira de rodas, tendo em vista fazer com que a mesma reaja em um plano inclinado da mesma forma que agiria em uma superfície sem angulação. Essas soluções contornam o problema do esforço excessivo em planos inclinados porém, não contornam a problemática de controlabilidade discutida anteriormente.

Uma das maneiras mais conhecidas e utilizadas para controlar um sistema dinâmico onde há uma intrínseca interação entre pessoas e máquinas é através de um controle de impedância, onde a interação entre a pessoa e o objeto controlado é regulada através de uma “impedância virtual” que relaciona a variável de movimento controlada do sistema dinâmico completo (pessoa/máquina) com a força exercida sob o objeto controlado. Esta abordagem foi primeiro descrita por Hogan (1984), para tentar obter uma solução viável a situações onde o trabalho exercido pelo sistema dinâmico controlado no ambiente não é desprezível.

## 1.1 OBJETIVO

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um sistema de controle que seja intuitivo ao usuário e que visa reduzir os problemas verificados na literatura em relação ao fato de cadeiras de rodas assistidas convencionais (PAPAW) não serem adequadas em regimes transitórios, situações onde o ambiente tem alta influência sobre o sistema cadeira/pessoa (como em rampas) ou quando manobras mais específicas (como o *wheelie*) são necessárias para a autonomia do usuário.

A ideia inicial é tentar amenizar os problemas abordados no item anterior mantendo a manobrabilidade da cadeira de rodas assistida intuitiva utilizando um controle de impedância, onde será imposta uma dinâmica de referência geral para o sistema cadeira de rodas/usuário a qual o controlador tentará acompanhar. Análises dessa estratégia de assistência serão feitas utilizando técnicas de controle ótimo, verificando os gastos energéticos da pessoa sob influência de regimes transitórios e permanentes no plano.

## 1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

O texto da dissertação está estruturado da seguinte forma:

- a) Na Revisão da literatura estão presentes um breve histórico da evolução da cadeira de rodas e a revisão dos trabalhos estudados com relação a dinâmica desta;

- b) Na Fundamentação teórica estão uma curta explicação sobre controle de impedância, a teoria básica de controle ótimo e de diferenciação automática, usadas na execução deste trabalho;
- c) Na Metodologia é apresentado o modelo da cadeira de rodas usada no trabalho, a comparação de diferentes tipos de assistência em cadeiras de rodas assistidas apresentada em Cuerva, Ackermann e Leonardi (2016), o desenvolvimento do controlador do controle de impedância e as condições de controle ótimo usada nas simulações;
- d) Em Resultados estão as respostas obtidas nas simulações feitas neste trabalho, sob as condições discutidas no tópico da metodologia;
- e) Em conclusão está os objetivos alcançados com este trabalho;

Os dois apêndices são o equacionamento do modelo biomecânico simplificado da cadeira de rodas usado no trabalho e a regra de quadratura usada para a conversão do problema dinâmico em um não linear (NLP).

### 1.3 NORMAS USADAS NO TEXTO

Neste texto foram usadas determinadas regras na nomenclatura de matrizes e outras notações. A saber:

- a) Termos dentro de vetores ou matrizes possuem o mesmo nome do vetor ou matriz (exceto em casos especiais). Sendo assim um vetor tempo pode ser definido como:

$$\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3, \dots, t_n]^T$$

- b) Matrizes têm dimensões  $n \times m$  onde  $n$  é o número de linhas e  $m$  o número de colunas. Essas matrizes são escritas em maiúsculas com negrito. Ex.  $\mathbf{T}$ ;
- c) : no índice indica todos os valores. Se este estiver entre dois números é a faixa do primeiro até o segundo.
- d) Linhas geralmente são indicadas usando o índice  $i$  quando não for informado e sempre são o termo mais próximo do nome da matriz. Ex.  $\mathbf{T}_{1:n}$ ;
- e) Colunas geralmente são indicadas usando o índice  $j$  quando não for informado e sempre são o segundo termo depois do número de linhas separado por uma vírgula. Ex.  $\mathbf{T}_{:,1:n}$ ;
- f) Variações nos pontos de colocação são indicados entre parênteses. Ex:  $A_{(1:n)}$ ;

g)  $\nabla$  representa o operador de derivadas parciais. Ex.

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$$

A primeira vez que aparecer no texto cada uma dessas regras, terá uma explicação sucinta do sistema usado, sendo retirada a explicação para demais recorrências.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Métodos de assistência, principalmente relacionados com a mobilidade, sempre foram importantes para a sociedade por melhorar as capacidades físicas de pessoas que possuem algum tipo de deficiência motora, podendo esta ter sido gerada por nascença ou quaisquer outros meios, como acidentes por exemplo, ajudando essas pessoas a ter uma vida normal sem maiores dificuldades no seu cotidiano.

Os primeiros itens relacionados à mobilidade assistida desenvolvidos datam do antigo Egito onde egípcios criavam próteses feitas de materiais simplórios como couro e madeira para recuperar alguma parte física perdida em acidentes, principalmente nas obras que eles trabalhavam.

Figura 1 – Prótese de um dedo do pé encontrada no antigo Egito, em exposição no museu do Cairo.



Fonte: Finch, 2007

Desde essa época, a tecnologia avançou muito e, com isso, as técnicas de assistência para pessoas deficientes também acompanharam a tendência, melhorando os materiais e formas de tornar a vida dessas pessoas cada vez mais próxima do ideal, ou no caso, cada vez mais próxima de como seria se elas não possuíssem nenhuma deficiência.

Atualmente, um dos meios mais comuns para se ajudar pessoas com deficiência nos membros inferiores é a cadeira de rodas, que simplesmente é uma cadeira com rodas que são propulsionadas pelos membros superiores da pessoa, entregando maior liberdade a seus usuários na execução de suas atividades do dia a dia.

Vários anos foram necessários para que a cadeira de rodas fosse desenvolvida em massa, sendo o primeiro modelo desenvolvido e patenteado em 1783 por John Dawson. O modelo, apelidado de “Bath Chair” em honra a cidade na qual ele construiu possuía duas rodas grandes traseiras para propulsão e uma roda menor dianteira para direcionar. Esse modelo foi um

grandioso sucesso, dominando o mercado de cadeiras de rodas até o começo do século 19 (ANDERSON, 2013).

As cadeiras de rodas dobráveis encontradas hoje em dia foram desenvolvidas em 1933 pelo engenheiro Harry Jennings. Harry desenvolveu para seu amigo Herbert Everest que queria uma cadeira de rodas dobrável, capaz de ser colocada em um automóvel para facilitar sua locomoção. Essa cadeira era bem similar as de hoje em dia, sendo feita por tubos de aço e com sua parte central dobrável (SLACK, 2015).

Figura 2 – Cadeira de rodas de Harry Jennings



Fonte: , 2014

Atualmente, com a tendência do envelhecimento descrito no censo global da OMS (2011) e a crescente preocupação da sociedade por melhores níveis de qualidade de vida, a locomoção assistida passou a ter maiores impactos no mundo acadêmico e, obviamente, a cadeira de rodas (que é um dos meios de mobilidade assistida mais conhecidos no mercado) e sua dinâmica de movimentação passou a ser fortemente estudada.

No trabalho de Gagnon et al. (2014), foram avaliadas as forças e a eficiência de propulsão no lado não dominante (esquerdo ou direito) de vários usuários de cadeira de rodas para diversas inclinações de pista. Os resultados mostraram que, com o aumento da inclinação, houve uma significativa redução no tempo de retorno das mãos, enquanto o ângulo inicial de contato entre a mão e o aro de propulsão tendeu a valores mais frontais. As forças totais e tangenciais aumentaram significativamente com a inclinação da pista. Não houve mudanças na média da força mecânica efetiva de propulsão (MEF) com a variação de inclinação de pista, ficando em torno de 42%.



O trabalho de Rozendaal, Veeger e L.H.V. van der Woude (2003) discute um balanço da eficiência mecânica em função do ângulo de aplicação da força do cadeirante no aro de propulsão, criando um fator  $R$  que avalia tanto questões biomecânicas quanto puramente de propulsão. Testes experimentais foram feitos com vários cadeirantes experientes para avaliar os padrões no ângulo de propulsão e compará-los com os ângulos simulados de máxima eficiência.

Os resultados mostram que na parte central do movimento de propulsão, a força obtida experimentalmente segue bem o modelo de máxima eficiência porém, diverge drasticamente no começo e no fim do movimento estando, as vezes, até em perpendicular em relação ao ângulo ideal de aplicação da força. Também é discutido que a melhor situação custo/benefício é no final do movimento de propulsão, quando os ângulos de menores custo biomecânicos e de propulsão estão muito próximos entre si. Nesta situação, foi verificado que a pessoa não aplica muita força na cadeira de rodas em relação a outras partes do movimento, contribuindo para um menor rendimento de movimentação.

Esses resultados podem ser o motivo principal da relatada baixa eficiência mecânica na propulsão de cadeira de rodas manuais, que possui valores tipicamente menores que 11% (WOUDE et al., 1988 apud ROZENDAAL; VEEGER; L.H.V. van der WOUDE, 2003).

Para reduzir os efeitos negativos na propulsão de cadeiras de rodas manuais, foi criado um novo tipo de cadeira de rodas que tenta mesclar a propulsão humana com o auxílio de um motor elétrico dotado de um sistema de controle. A esse tipo de cadeira de rodas híbrida se deu o nome de PAPAW e é objeto de vários estudos contemporâneos envolvendo cadeiras de rodas.

Um dos precursores das PAPAW é Cooper et al. (2002), que desenvolveu um sistema para uma cadeira de rodas semi assistida baseado em uma atuação proporcional ao torque imposto pela pessoa nos aros de tração. Ruídos foram evitados impondo uma zona morta em torno da região de torque nulo. Outros eventuais problemas de oscilação na resposta do sistema foram evitados impondo uma dinâmica de primeira ordem, que tenta tornar a resposta do sistema contínua. Foi imposto um chaveamento na lei de controle para haver força do motor durante o período de retorno no ciclo de propulsão da cadeira de rodas, necessário para compensar os atritos estáticos e dinâmicos acrescentados pelo motor, que fariam a cadeira de rodas perder velocidade rapidamente.

Resultados foram satisfatórios usando uma ajuda proporcional de 3:1, reduzindo os picos de força em comparação com uma cadeira de rodas convencional. Algumas oscilações ocorreram na velocidade, principalmente quando a pessoa acopla e desacopla as mãos para tracionar o sistema, situações esta onde ocorre um choque de forças entre a mão e o aro de propulsão.

A eficiência de uma cadeira de rodas híbrida vem sendo constantemente analisada pela comunidade acadêmica e vários trabalhos foram realizados para verificar e contextualizar sua melhoria em relação a uma cadeira de rodas manual, tentando abordar vários ambientes no qual o usuário usufruiria de sua assistência.

Figura 3 – Cadeira de rodas do tipo PAPA



Fonte: , 2016

Em Marieke G.M. Kloosterman et al. (2012) é apresentado uma análise da cinemática dos membros superiores com e sem a utilização de assistência em uma cadeira de rodas convencional. Foram medidas as três componentes da força e momentos a uma velocidade imposta. A ativação muscular dos membros superiores foi obtida por meio de um sistema de eletromiografia baseado em 16 canais.

Os resultados mostraram uma redução nas forças máximas das três direções do movimento. Reduções menores nos valores foram obtidas em relação à cinemática do ombro e suas ativações musculares. Com respeito às frequências de tração, os resultados não mostraram diferença estatística, sendo que em alguns testes, foi verificado um aumento na frequência de tracionamento, que é um dos principais fatores nos casos de sobreuso e fadiga muscular.

Mesmo auxiliando muito no movimento longitudinal, as cadeiras de rodas assistidas (PAPA) possuem algumas limitações que as tornam até piores que as cadeiras de rodas convencionais em algumas situações. Alguns desses problemas e características são citados em Guillon et al. (2015), onde três tipos diferentes de assistências passaram por variados testes: duas *Servomatic* de assistência em escalas de 1,5 e 3 vezes o torque aplicado pela pessoa e uma *E-Motion* de assistência fixa baseada em um limiar de força. Foram analisadas pessoas com diferentes tipos de deficiência sob três situações: medição de frequência cardíaca e consumo de oxigênio em um dinamômetro, circuitos internos e externos e transferência autônoma para seus veículos.

Os resultados demonstraram que as frequências cardíacas e o consumo de oxigênio foram geralmente menores nas cadeiras de rodas assistidas em comparação com as convencionais no percurso externo que foi percorrido sem diferenças significativas no tempo. Esses resultados foram diferentes nos pacientes tetraplégicos em específico, que não demonstraram diferença

estatística nos resultados medidos. Uma das possíveis causas dessa disparidade pode ser o fato de pacientes com tetraplegia terem menores massas musculares, não podendo usufruir de muita força na propulsão e, conseqüentemente, não obtendo tanta assistência nas *Servomatics* que trabalham com base em proporção do torque aplicado.

No percurso interno não houve diferença entre as servo assistidas e a cadeira de rodas manual, mas houve maiores frequências de tração e colisões com objetos na utilização da *E-Motion*. Sobre as transferências dos veículos, como esperado, todas as PAPAWS tiveram desvantagens, principalmente a *E-Motion* por ser a mais pesada.

Alguns desses problemas também são citados por M. G. Kloosterman et al. (2013), onde foram feitas várias análises sistemáticas de artigos que apresentavam alguma comparação entre cadeiras de rodas manuais e as semi-assistidas, apresentando o conhecimento geral que se tinha sobre esse assunto, tal como pontos fortes e fracos da transição entre esses dois tipos de cadeira de rodas. Os artigos analisados deveriam satisfazer três condições: deveriam investigar os efeitos da assistência sobre a pessoa, conter testes clínicos ou controlados e terem sido divulgados em uma revista de renome, em inglês. Os artigos foram avaliados por dois avaliadores sobre 27 questões diferentes, podendo atingir uma nota máxima de 32. Foram categorizados e estudados 16 artigos, obtendo uma faixa de 9-14 dos 32 pontos máximos que poderiam obter.

Em geral, foi verificado que as PAPAWS diminuem os picos de força nos membros superiores e a frequência cardíaca de seus usuários, além de reduzir as taxas de respiração e gerar uma maior eficiência no movimento. Demonstra-se que as PAPAWS possuem uma tendência de uso nas situações onde são necessárias maiores forças tal como percorrer grandes distâncias ou por ambientes desfavoráveis como carpetes. Porém, se demonstrou exigirem maiores e/ou iguais gastos para situações onde é preciso um melhor controle do movimento, tal como andar em lugares fechados ou fazer determinados movimentos como *wheelie* ou abrir portas. Para tais eventos, a maior parte dos participantes, quando questionados, prefeririam suas cadeira de rodas convencionais em relação a PAPAWS.

Foram verificadas também maiores dificuldades para transporte, visto o seu aumento de peso e largura, além de problemas na desmontagem (quando necessário). Nenhuma pesquisa analisada levou em consideração uso por longos períodos de tempo e possíveis conseqüências que isso possa trazer, além de fatores pessoais ou de ambiente que deveriam ser tratados, visto que, para muitos, a cadeira de rodas é o principal meio de locomoção.

Esses trabalhos mostram que, por mais que o sistema atual de PAPAWS seja efetivo na redução da força máxima aplicada pela pessoa, esta geralmente é condicionada a uma condição de regime permanente onde longos trajetos são usados sem grandes dificuldades em termos de manobrabilidade. Quando exposta a situações onde são necessários vários regimes transitórios (manobras mais complexas, como andar em lugares fechados, etc.), o sistema atual usado nas PAPAWS atrapalha o usuário, principalmente devido a falta de intuitividade do sistema assistido.

Alguns trabalhos foram propostos com base na premissa de redução da massa extra causada pelo motor. Um desses trabalhos é o de Medola et al. (2014), que apresenta o desenvol-

vimento de uma cadeira de rodas com assistência baseada em um sistema servo de baixa massa. A cadeira foi desenvolvida para ter menores proporções e proporcionar melhores resultados quando em situações adversas, como por exemplo, fazer curvas fechadas que exijam torques com perfis assimétricos, situações nas quais as cadeiras de rodas assistidas (PAPAW) geralmente se mostram ineficazes. Um algoritmo foi desenvolvido para tentar reconhecer quando a pessoa tenta tracionar o sistema para adquirir maiores velocidades (aceleração) ou quando ela quer diminuir a mesma (desaceleração) tentando assim entregar uma dinâmica a mais em situações transitórias.

Em Hwang, C.-H. Lee e Bang (2012), foi desenvolvido um sistema de controle para compensar os efeitos da gravidade sobre uma cadeira de rodas em um plano inclinado. Como o sistema de assistência da cadeiras de rodas foi feito usando um motor elétrico e reduções, os gastos com atritos internos foram elevados tornando o movimento do sistema dinâmico cadeira de rodas/pessoa ineficiente, principalmente sob inclinações de pista. Testes em malha aberta e fechada foram feitos avaliando o sistema com um sensor de angulação por giroscópio a diferentes forças proporcionais de assistência e comparando com a resposta obtida quando a cadeira está no plano. Resultados se demonstraram promissores porém, a dependência natural desse sistema sobre a massa do usuário, torna essencial o desenvolvimento de um sensor automático de massa para o projeto.

Em extensão ao trabalho apresentado acima, K.-m. Lee et al. (2016) apresenta melhorias ao projeto já desenvolvido, compensando também o atrito gerado pelo motor elétrico. O sistema possui um chaveamento que ativa uma embreagem magnética que só é acionada na presença de rampas. O atrito foi compensado por uma força constante, tendo uma zona morta ao redor da velocidade nula. Testes foram feitos com o novo sistema em rampas e comparados com a cadeira de rodas modificada em perfil plano. Discute-se que o usuário pode fazer movimentos delicados no plano inclinado como se fosse no plano e essas informações são reforçadas pelos dados obtidos. Também é avaliada a situação onde há combinações de inclinações.

Todos esses problemas apontados podem ser reduzidos a apenas um problema básico no controle visto em cadeiras de rodas: o fato do sistema de controle normalmente não levar em consideração o ambiente ao redor do sistema físico descrito pela cadeira de rodas e usuário.

Esse tipo de problemática é mais complicada do que parece: a dinâmica dos membros superiores geralmente não é medida pelo controlador, tornando difícil o projeto de controladores que estimem o ambiente e sejam de resposta intuitiva ao usuário.

Por esses motivos, alguns trabalhos acadêmicos focaram em outros tipos de soluções, como o trabalho de Mizutani et al. (2013), onde é apresentado um braço robótico para melhorar a propulsão de cadeiras de rodas manuais em pessoas que possuem quase nenhuma força nos membros superiores. O braço é composto por duas partes: uma externa e uma interna ligados por molas finas; esse método é conveniente para a medição de movimentos de extensão e contração para saber a intensão do usuário. O sistema de controle foi separado em quatro partes distintas para se ter a melhor dinâmica necessária no movimento. A posição da mão e a veloci-

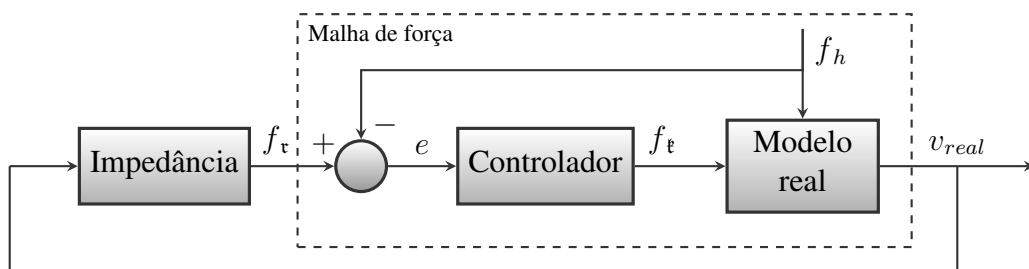
dade da cadeira foram estimados usando uma transformação de coordenadas e uma solução de mínimos quadrados. O sistema foi testado verificando experimentalmente com um usuário em uma esteira.

No trabalho de Oh e Hori (2015) é apresentado um sistema de controle para uma cadeira de rodas assistida baseada na lógica fuzzy para diversos ambientes e situações. O modelo da cadeira foi considerado como um pêndulo invertido com rodas e um sistema de acelerômetros e giroscópios fazem a tomada de dados necessária para o controlador. É aplicado um filtro de Kalman para tratar os sinais medidos. O controlador fuzzy varia o torque de assistência que será empregado na cadeira, dependendo da condição de uso. Esse torque é proporcional ao aplicado pela pessoa, seguindo apenas um atraso dinâmico pré-definido. São empregados dois modelos diferentes para a rotação e a translação da cadeira, ambos usados como referência para a rejeição de possíveis distúrbios causados principalmente pela gravidade. Um simples controlador proporcional-derivativo foi projetado para atenuar o erro do sinal mensurado com o calculado, sem causar grandes forças por parte do motor. Medidas foram feitas com uma cadeira de rodas instrumentada andando em condições comuns do dia a dia.

Uma das soluções mais conhecidas usadas em sistemas mecânicos que envolvem interação entre operador/máquina e lida com interações com o ambiente é conhecida por controle de impedância e visa relacionar a força externa de reação do ambiente com a cinemática controlada do sistema mecânico através de um modelo pré estabelecido.

O sistema de controle de impedância é normalmente constituído de uma realimentação no sistema. Cria-se uma lei de controle que relaciona a força resultante no sistema dinâmico com a entrada de referência  $f_r$  que é obtida pelas variáveis cinemáticas e um modelo de referência. Na figura 4 é ilustrado um controle de impedância típico.

Figura 4 – Diagrama de um sistema de controle por impedância típico



Fonte: Autor

Há várias formas diferentes de se tentar impor uma impedância específica a um sistema, uma dessas é a usada em Liaw e Shirinzadeh (2008), onde foi desenvolvido um sistema de controle robusto de impedância para a estabilização de um mecanismo de quatro barras flexível atuado por um atuador piezo. Esse tipo de sistema é muito útil principalmente para o manuseio de componentes com tamanhos na ordem de nano/micro metros. Foi exposto um modelo de

impedância generalizado que relaciona a trajetória e a força de contato com o ambiente através da aplicação de um ganho. O acompanhamento da impedância é feito admitindo-se uma função de deslizamento (*sliding function*) que relaciona o erro de posicionamento com o erro da força através de um estado extra.

Em J. Lee, Chang e Jamisola (2014), foi desenvolvido um sistema de controle por impedância único para controlar dois braços robóticos fazendo atividades assimétricas. Isso foi obtido relacionando os dois operadores terminais através de uma jacobiana relativa, podendo assim tratar o sistema inteiro como se fosse apenas um robô. A resposta do controlador desse projeto foi garantida usando dois tipos de estratégias junto ao controle de impedância: a estimativa de tempo de atraso (*time delay estimation*) e a realimentação ideal da velocidade (*Ideal-Velocity Feedback*). A primeira (TDE) é um tipo de estratégia de controle para um sistema sem modelo explícito da planta, enquanto a segunda é uma estratégia baseada em um modelo de admitância e serve principalmente para eliminar não linearidades descontínuas como o atrito de Coulomb por exemplo.

Um exemplo de trabalho assistido envolvendo controle de impedância é o apresentado em Alqaudi et al. (2016), onde foi desenvolvido um controle de impedância adaptativo por modelo de referência que envolve a pessoa dentro da malha, não sendo necessário impor uma trajetória de referência para o sistema usuário/máquina, tornando o sistema bem versátil. As não linearidades que normalmente são compensadas pelo usuário, são medidas através de um controlador neural adaptativo, facilitando seu uso por parte do mesmo. As entradas de referência usadas tanto pelo controlador quanto pelo modelo de referência são obtidas conhecendo-se o que o sistema dinâmico usuário/máquina deverá fazer. Simulações numéricas e experimentais foram feitas tendo como objetivo deslocar a ponta do braço robótico de um ponto a outro comprovando a eficiência do método.

O controle de impedância é bastante utilizado no projeto de órteses como exoesqueletos. Em Anam e Al-Jumaily (2012) são discutidos os métodos principais de controle usados para o projeto de exoesqueletos por sistema ativo. É demonstrado que a maior parte dos sistemas de controle para essa utilização envolvem duas partes: uma superior, geralmente comandada por um sistema de referência por impedância ou admitância e uma inferior onde é reduzido o erro entre a referência e o real. Além desse tipo de controlador, é discutido a utilização de outros tipos mais específicos, como os baseados em sinais EMG por exemplo além de controladores com base em realidade virtual.

Foram discutidos itens importantes como a falta de foco em segurança nos sistemas de controle e possíveis problemas específicos, encontrados principalmente por modelos baseados em EMG. O autor propõe sistemas híbridos (EMG e modelos dinâmicos) para compensar tais problemas.

Em relação a cadeiras de rodas assistidas, há poucos trabalhos acadêmicos que trabalham com modelos de referência (parte essencial do controle de impedância), um desses poucos trabalhos é o apresentado em Shibata e Murakami (2012), onde foi apresentado um sistema de

controle para uma cadeira de rodas assistida usada em movimentos que envolve empurrar objetos como mesas e abrir portas. Esse sistema mede a força de reação proporcionada pela pessoa sob o objeto como uma aceleração extra que deve ser reduzida para facilitar o movimento. A força da pessoa foi modelada apenas por meio da resposta de um modelo de primeira ordem com massa e atrito dinâmico.

A reação é estimada por um observador de distúrbios que utiliza a informação da aceleração de referência e a velocidade real da cadeira. Esse valor estimado é então multiplicado de um ganho proporcional e aplicado sob um modelo de referência similar ao da cadeira de rodas convencional de primeira ordem. Essa velocidade de referência junto com a aceleração compõem o sistema de realimentação que tenta retirar a influência da aceleração de reação originada do contato entre usuário e objeto, ajudando na propulsão da cadeira.

Testes foram conduzidos testando o movimento de empurrar uma mesa e abrir uma porta. Foi considerada apenas a dinâmica longitudinal sem a presença de atritos dinâmicos. O modelo de referência foi escolhido com parâmetros similares ao do sistema dinâmico real formado pela cadeira de rodas/usuário. Os resultados demonstraram que o sistema de controle conseguiu reduzir a influência da força de reação entre o cadeirante e usuário. É discutido que este mesmo sistema pode ser usado para rampas, pois a componente da gravidade pode ser considerada como uma força de reação extra cujo o controlador tentará reduzir.

Em Tsai e Hsueh (2013) é apresentado um projeto de observador de distúrbios para uma cadeira de rodas assistida, com o propósito de medir a força aplicada pela pessoa, sem a necessidade de um sensor de torque. O projeto do observador não envolve a derivada da velocidade tornando o sistema mais estável em comparação aos que necessitam de derivação numérica. A cadeira de rodas é modelada como um sistema de primeira ordem em dois tipos de movimento: longitudinal e rotacional. A dinâmica é desacoplada através de uma lei de controle específica com base nos parâmetros de referência do modelo, onde força é estimada como distúrbio. Testes foram feitos com a assistência desativada e ativada. Para ambos os casos, a cadeira de rodas foi testada sendo empurrada por uma pessoa e com o cadeirante parado. Resultados demonstraram serem bem próximos dos medidos por acelerômetros, tendo alguns erros devido a dinâmica do pneu e outros termos não modelados.

Os trabalhos apresentados anteriormente trabalham com modelos simples de primeira ordem para a representação da cadeira de rodas. Esse modelo não representa corretamente as dinâmicas totais do sistema completo da propulsão, pois despreza a dinâmica dos membros superiores do cadeirante.

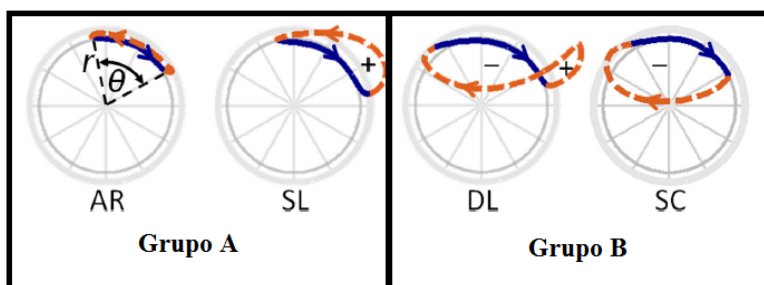
A dinâmica não linear relativa entre o usuário e a cadeira de rodas, que geralmente é desprezada, pode ter forte influência na resposta final do sistema, principalmente a altas velocidades onde as forças inerciais dos membros superiores da pessoa não é desprezível (AMÂNCIO, 2016).

Isso é também observado no trabalho de Slowik et al. (2015), onde foi apresentado um padrão para se avaliar a diferença no trajeto da mão durante a fase de propulsão de uma

cadeira de rodas em condições adversas. Foram testadas três diferentes situações: propulsão em velocidade confortável para o usuário, em velocidade alta e em inclinação de pista. Os testes foram feitos em uma máquina ergométrica estacionária.

Resultados demonstraram que em velocidades mais baixas (velocidades confortáveis) houve um uso maior de trajetos de retorno da mão por baixo do aro de tração (Grupo B na figura 5), ao passo que, com o aumento da velocidade, houve um significativo crescimento no uso de padrões de trajeto de retorno superiores (Grupo A na figura 5). Esse comportamento provavelmente acontece devido a inércia dos membros superiores da pessoa, que se torna um fator importante com o aumento da velocidade. Nos testes com rampas, os padrões foram mais próximos do aro de tração e, mesmo que não houvesse mudanças estatísticas no tamanho da fase onde a pessoa traciona a cadeira, houve uma grande diminuição no tamanho da fase de retorno e aumento nas forças tangenciais e totais aplicadas no aro de tração.

Figura 5 – Padrões de trajeto da mão para a propulsão de cadeira de rodas manuais.



Fonte: Autor "adaptado de" Slowik et al., 2015

Essa dinâmica relativa entre usuário e cadeira de rodas é um grande problema para o projeto de um controlador que trabalha por modelo de referência (neste caso, um controle de impedância), pois esta dinâmica relativa não pode ser mensurada pelo sistema de controle (não é observável). Sendo assim, para aplicar o controle de impedância ou algum outro tipo de sistema de controle com modelo de referência, é importante ter alguma base de verificação para analisar se o sistema dinâmico final controlado tem comportamento similar ao do sistema real.

No trabalho em Cuerva, Ackermann e Leonardi (2016), é demonstrado que variar de forma aparente parâmetros do sistema real como uma forma de assistência, pode reduzir até a metade a força aplicada pelo usuário se comparado com resultados onde só houve uma simples multiplicação do torque aplicado pelo usuário, tal como é apresentado em todos os sistemas de controle para cadeiras de rodas assistidas acima discutidos.

Ferramentas de controle ótimo, tal como utilizado em Ackermann et al. (2014), servem como uma boa base para comparação em situações como a apresentada, onde é necessário avaliar a influência em dinâmica direta do sistema de controle sob as variáveis de entrada, sem necessitar de implementar em uma cadeira de rodas real e tirar dados experimentais.



Portanto, neste trabalho será modelado um sistema dinâmico representativo do movimento de propulsão da cadeira de rodas e testado em uma estratégia de controle que visa implementar um modelo de referência diferente do original como forma de auxílio na propulsão. Testes serão feitos usando controle ótimo para avaliar a eficiência do método em relação a cadeira de rodas convencional, tal como investigar os melhores parâmetros para o modelo de referência proposto e verificar se o controlador final é capaz de ter robustez a pessoa com tipos físicos diferentes da usada em projeto.



### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo serão expostas as teorias que serão usadas na elaboração da metodologia do trabalho, desde a teoria de controle de impedância até a de controle ótimo e discretização de estados usada para verificar por simulação a estratégia de controle proposto.

#### 3.1 CONTROLE DE IMPEDÂNCIA

De modo geral, uma impedância pode ser definida como sendo a resistência que um sistema físico possui à aplicação de uma determinada força qualquer. Esse termo é muito usado na área elétrica, onde é definido como a resistência complexa que um circuito elétrico possui a passagem de corrente quando este está sendo submetido a uma diferença de potencial elétrico.

Controle de impedância foi primeiramente introduzido por Hogan (1984), para descrever um sistema de controle que, ao invés de controlar apenas uma variável tal como força ou velocidade de um sistema físico, tenta controlar a relação entre essas duas grandezas, transformando aparentemente o sistema físico real em um equivalente que possui propriedades diferentes do original.

Essa estratégia de controle foi criada para situações onde há contato direto entre o sistema dinâmico controlado e fatores ambientais, tais como situações onde o sistema dinâmico controlado (planta) exerce/sofre trabalho em relação ao ambiente. Para essas situações, um sistema de controle de posição que comanda um atuador por exemplo, pode danificar o mesmo fisicamente se este deparar com uma resistência entre a posição de partida e a requerida pelo usuário, já que o controlador tentará ao máximo eliminar a diferença de posições, mesmo implicando a quebra do sistema mecânico/elétrico.

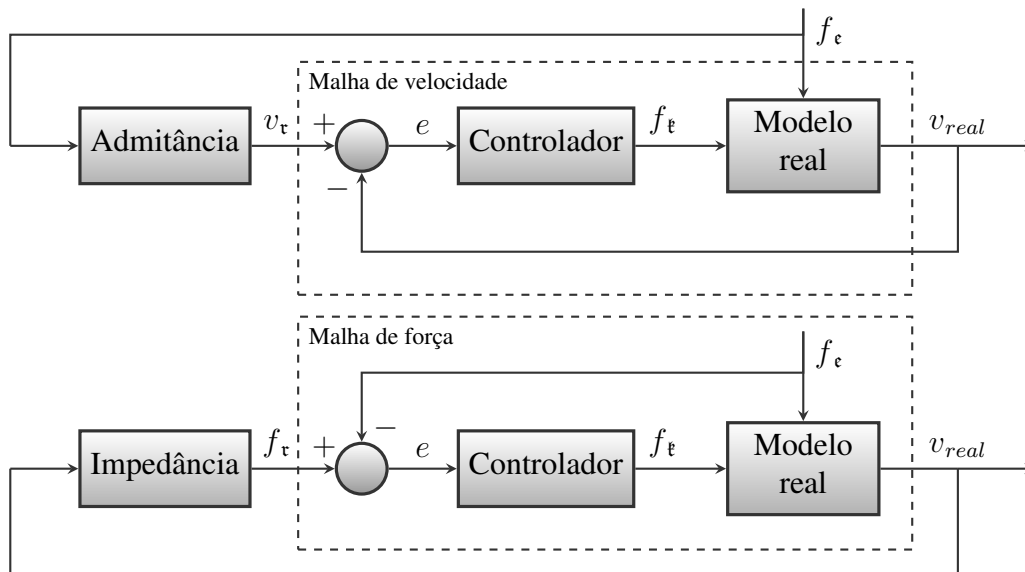
Há diversas formas de se resolver o problema de interação com o ambiente, como, por exemplo, através de um observador de distúrbios ou por uma modelagem do sistema dinâmico como um todo (sistema controlado + ambiente). Essas soluções, dependendo da situação, podem não ser viáveis devido a dificuldades de se modelar as perturbações ou até ao fato dessas serem de diversas naturezas, tornando o sistema muito complicado com diversos casos especiais.

Tendo isso em vista, o controle de impedância serve para tentar abranger essas situações de modo geral, impondo uma resposta no sistema que segue uma relação entre as forças externas aplicadas e a cinemática ao invés do direto controle de um ou outro. Essa relação é dada por um modelo de referência que representa a resposta desejada do sistema dinâmico controlado.

Por ter essa característica adaptativa ao ambiente, esta estratégia de controle é bem usual na área de robótica, onde os robôs devem adaptar seus movimentos para evitar a quebra de componentes com os quais esteja interagindo ou mesmo dos sistemas internos que estão sendo controlados.

Na figura 6 são observados os dois tipos possíveis de controle de impedância típicos. No primeiro caso, há uma comparação da força atuante no sistema, sendo a realimentação interna criada para garantir que a força mensurada seja igual a força de referência. No segundo caso, a mesma situação é demonstrada porém, a comparação é feita em variáveis cinemáticas (velocidade no caso).

Figura 6 – Diagrama de blocos do sistema com modelo de referência.



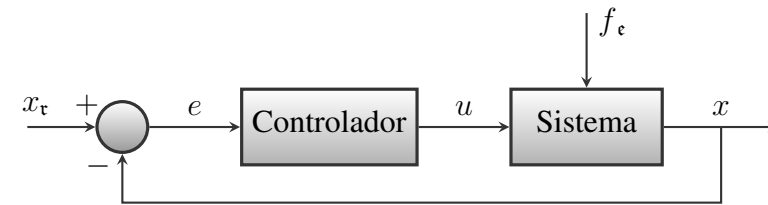
Fonte: Autor

Como pode-se observar na figura 6, o controle de impedância geralmente é formado por duas malhas de realimentação: uma para controlar a diferença entre as entradas do sistema (forças e torques) e outra para gerar a referência da variável dinâmica ou vice versa. Por necessitar de leitura das forças ou torques aplicados, muitas estratégias de controle de impedância se utilizam de observadores de distúrbios.

O controlador do controle de impedância deve ser bem robusto para lidar com as diferentes respostas dinâmicas e forças de interação que o sistema controlado possa vivenciar. Por isso, é comum o uso em sistemas adaptativos, onde se faz o modelo real do sistema ter uma reação seguindo o sinal de referência, adaptando valores do controlador para se manter sob a superfície de erro nulo. A essa estratégia é dado o nome de *Model Reference Adaptive Control* (MRAC) (do inglês, Controle Adaptativo por Modelo de Referência).

Uma estratégia simples de projeto do controlador envolve considerar somente a malha interna do sistema de controle completo e projetar um controlador para garantir que o erro  $e = x_r - x_{real}$  seja pequeno. Isso permite que o controlador seja projetado, por exemplo, usando a técnica de realimentação de estados. A figura 7 ilustra esse tipo de controlador para um estado.

Figura 7 – Diagrama de blocos da realimentação por estados.



Fonte: Autor

Nessa situação a lei de controle é formada por uma função do estado de referência e real:

$$u = f(x_r, x_{real}) \quad (1)$$

Se o sinal de referência tiver propriedades conhecidas e os estados forem observáveis, é possível escrever uma lei de controle que garante que o erro seja mínimo dentro de uma faixa de frequência adotada usando técnicas de análise de frequência como as normas infinito e quadradas.

Uma outra estratégia bastante utilizada no controle de problemas de impedância é a chamada Controle por Modos Deslizantes (SMC) (do inglês, *Sliding Mode Control*), onde se cria uma superfície de escorregamento que, fazendo os estados do sistema deslizarem sob ela, é possível garantir um problema de robustez. Alguns trabalhos que aplicaram a técnica SMC em um problema de controle de impedância são Xu (2013), Liaw e Shirinzadeh (2008) e Hussain, Xie e Jamwal (2013).

No caso da cadeira de rodas, o modelo de referência usado pelo controle de impedância infelizmente não pode ser muito descritivo devido a falta da medição da cinemática dos membros superiores da pessoa, tornando o sistema não observável. Há maneiras de se observar tais estados faltantes, mas esta é geralmente custosa e pouco prática.

Alguns modelos simplificados da cadeira de rodas são encontrados na literatura. Em Katsura e Ohnishi (2006) foi usado um modelo envolvendo duas dinâmicas principais: a dinâmica de rotação e a de translação relacionando estas através de uma matriz de transformação com as medidas das angulações das rodas traseiras. Os sinais de referência são medidos através de sensores de torque e uma estimativa da força resistiva do ambiente é aproximada por um observador de distúrbios. Esse modelo também é utilizado em Oh e Hori (2014).

Em ambos os trabalhos, o modelo real de uma cadeira de rodas com o cadeirante em movimento de translação foi aproximado por uma função de transferência de primeira ordem:

$$\frac{v_{real}}{f_b} = \frac{1}{m \cdot s + b} \quad (2)$$

onde  $m$  descreve a massa equivalente da cadeira de rodas e  $b$  o coeficiente de atrito dinâmico equivalente da mesma.

A força do cadeirante  $f_h$  pode ser dimensionada como uma força ambiental que atua sobre o modelo do sistema (como na figura 8). Seguindo a mesma lógica de modelagem da cadeira de rodas, o modelo de referência (ou impedância desejada) pode ser visto também como uma dinâmica de primeira ordem:

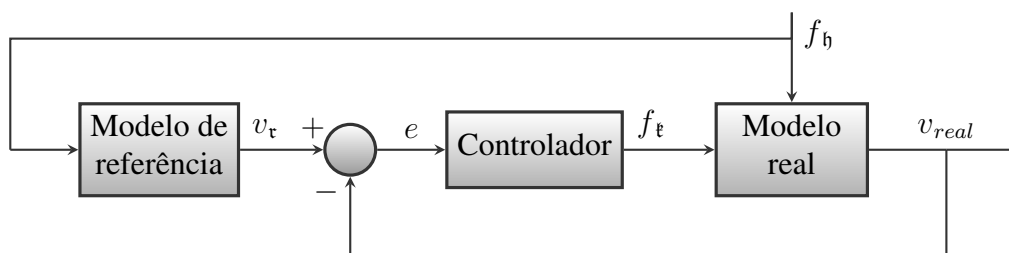
$$f_\tau = (m_\tau \cdot s + b_\tau) \cdot v_\tau \quad (3)$$

onde  $m_\tau$  e  $b_\tau$  são parâmetros que podem ou não ser constantes.

O objetivo principal do controlador é fazer  $e = f_\tau - f_h$  para um modelo de impedância externo (ou  $e = v_\tau - v_{real}$  para um modelo de admitância de referência) tender a zero, ou seja, em ambos os casos para uma força proporcionada pela pessoa no sistema, este precisa ter reação segundo a equação 3 ao invés da reação nominal descrita por (2).

Na figura 8 é ilustrado um diagrama de blocos de um controle por impedância com controlador de velocidade.

Figura 8 – Diagrama de blocos do sistema com modelo de referência.



Fonte: Autor

Neste trabalho, foi utilizado o uso da força como entrada no modelo de referência na figura 8. Este foi escolhido por fazer o modelo perceber mais rapidamente a intenção do usuário e agir diminuindo o esforço inicial.

É importante ressaltar que, a força do usuário não é aplicada constantemente sob a cadeira, fazendo a malha externa representada pela realimentação do modelo de referência ser independente dos movimentos da pessoa quando este retorna a mão ao aro de propulsão, essa característica pode ser benéfica ou maléfica dependendo da situação.

### 3.2 CONTROLE ÓTIMO

Controle ótimo é uma parte específica da otimização dinâmica onde se deseja encontrar uma lei de controle específica em malha aberta que minimiza ou maximiza uma função custo dependente de seus estados e controles. Esse funcional pode ser definido sob seus pontos contínuos no tempo (através de uma integral), seus pontos extremos ou mesmo as duas condições. A

equação 4 mostra um tipo geral de funcional, onde as funções  $\Phi$  e  $\mathcal{L}$  são definidas pontualmente e continuamente respectivamente.  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$  representam os  $n$  estados e  $p$  controles.

$$\mathcal{J} = \Phi [\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (4)$$

Vários problemas dinâmicos possuem restrições dinâmicas bem definidas que podem ser expressas segundo o formato:

$$c_i [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] = 0 \quad \text{para } i = (1, 2, 3, \dots, c < n) \quad (5)$$

sendo  $c$  o vetor de funções de restrições do sistema dinâmico.

Tal como ilustrado em Wächter e Biegler (2005), o tratamento de restrições de desigualdade (bastante comuns na engenharia) pode ser feito por meio de restrições de igualdades, pois elas podem ser colocadas nessa forma por meio de variáveis de folga ou de excesso.

Para implementar essas restrições dinâmicas no funcional (4), são utilizadas funções adjuntas  $\lambda_i(t)$  tal como ilustrado em:

$$\mathcal{L} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = \Psi [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6)$$

Os estados representados pelo vetor  $\mathbf{x}$  são descritos por equações diferenciais que comumente, podem ser expressas no formato de espaço de estados seguindo a equação 7. Essas equações diferenciais representam restrições dinâmicas que devem ser acrescidas ao lagrangiano, através do vetor de restrições  $\boldsymbol{\lambda}$ .

$$\frac{dx_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_i [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad \text{para: } i = (1, 2, 3, \dots, n) \quad (7)$$

Para encontrar o mínimo do funcional (4), pelo teorema básico de cálculo, basta encontrar funções candidatas  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{u}^*(t)$  e  $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$  que satisfaçam as equações:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}}{dt} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)] &= 0 \\ \frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2} [\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)] &> 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Assim, derivando a função objetivo (4) com relação as suas dependências e igualando a zero, obtêm-se o conjunto de equações:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^T \Psi = -\nabla_{\mathbf{x}}^T [\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c}] \quad (9a)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}}^T \Psi = -\nabla_{\mathbf{u}}^T [\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c}] \quad (9b)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad (9c)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^T \Phi = -\left[\nabla_{\mathbf{x}}^T [\Psi + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c}]\right]_{t=t_f} \quad (9d)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^T \Phi = -\left[\nabla_{\mathbf{x}}^T [\Psi + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c}]\right]_{t=t_o} \quad (9e)$$

$$(9f)$$

cuja diferenciabilidade depende da norma utilizada.

A forma de se encontrar o conjunto de funções candidatas  $[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)]^T$  através do sistema de equações 9 se chama *método indireto de otimização*. Esse método de resolução, embora muito preciso, possui alguns problemas: 1) é necessária a derivação parcial dos fatores definidos em (9) o que pode ser demasiadamente complicado dependendo das funções de restrições e objetivo; 2) é necessário obter as funções dos multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  para o uso do método. Muitas vezes, essas funções são de difícil compreensão pois não são características físicas (BETTS, 2010).

Existe uma outra forma de resolução da função objetivo (4) sob as restrições (6) conhecida como *método direto de otimização*. Esta consiste em discretizar os estados e controles em pequenos intervalos de tempo entre  $t_o$  e  $t_f$  e resolver o problema dinâmico sobre esses pontos. Assim, definindo um vetor de tempo com  $m$  pontos na forma:

$$\mathbf{t} = [t_o = t_1, t_2, t_3, \dots, t_m = t_f]^T \quad (10)$$

e Vetor de variáveis:

$$\mathbf{z} = [x_1(t_1), x_1(t_2), \dots, x_1(t_m), x_2(t_1), \dots, x_n(t_m), u_1(t_1), \dots, u_p(t_m)]^T \quad (11)$$

A função objetivo 4 pode ser reescrita na forma:

$$\mathcal{J} = \Phi [x(t_o), x(t_f), t_o, t_f] + \int_{t_o}^{t_f} \Psi [\mathbf{z}, t] dt + \sum_{i=1}^m (\lambda_i \cdot c_i) \quad (12)$$

A continuidade no tempo da dinâmica entre as variáveis de estado é garantida usando algum método simples de quadratura. O mais conhecido é o método de K ordem de *Runge-Kutta*, no qual se aplica uma quadratura dentro de uma quadratura criando  $m - 1$  limitações para cada estado no formato:



$$x_{i+1} = x_i + h_i \sum_{j=1}^K \mu_j \cdot \Omega_{i,j} \quad (13)$$

$$\Omega_{i,j} = \Omega \left[ \mathbf{z}_i + h_i \sum_{z=1}^K \eta_z \cdot \Omega_{i,z,t_i} + h_i \cdot \rho_i \right] \quad (14)$$

Sendo  $h_i$  o intervalo de tempo entre  $t_{i+1}$  e  $t_i$  e  $\eta$ ,  $\mu$  e  $\rho$  pesos definidos pela ordem  $K$  escolhida. Dois métodos de ordem  $K$  bem conhecidos são: trapezoidal, definido por:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h_i}{2} (\Omega_i + \Omega_{i+1}) \quad (15)$$

e o de Runge-Kutta de quarta ordem, definido pelo conjunto de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 = h_i \cdot \Omega_i \\ \kappa_2 = h_i \cdot \Omega \left[ \bar{V}_i + 0.5\kappa_1, t_i + 0.5h_i \right] \\ \kappa_3 = h_i \cdot \Omega \left[ \bar{V}_i + 0.5\kappa_2, t_i + 0.5h_i \right] \\ \kappa_4 = h_i \cdot \Omega \left[ \bar{V}_i + \kappa_3, t_{i+1} \right] \\ x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6} (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4) \end{array} \right. \quad (16)$$

Ambos os métodos definidos acima calculam o conjunto de restrições dinâmicas (7) em todos os pontos discretos. A essa forma de quadratura é dado o nome de *Quadratura de Lobatto* (BETTS, 2010). Outros tipos de quadraturas são: 1) a quadratura de Gauss, onde não se calculam as derivadas ( $\Omega$ ) como restrições dinâmicas no primeiro e no último ponto discreto. 2) a quadratura de Radau, onde não se calculam as restrições de derivadas no primeiro ou no último ponto discreto (BETTS, 2010).

É comum se denominar esses pontos onde a restrição dinâmica dos estados (7) é satisfeita por pontos colocados. Devido a isso, muitas vezes, o método direto de otimização é conhecido como método da colocação direta.

Para esse trabalho, foi utilizado o método de quadratura de Gauss por polinômios de Legendre. Detalhes sobre esse método podem ser encontrados no apêndice B.

Aplicando a ideia de quadratura sobre a integral discreta em 12, pode-se obter a função objetivo:

$$\mathcal{J} = \Phi + \sum_{i=1}^m (w_i \cdot \Psi_i) + \sum_{j=1}^c (\lambda_j \cdot c_j) \quad (17)$$

onde  $\mathbf{w}$  é um vetor de pesos fixos definido pelo método escolhido de quadratura.

Derivando a função objetivo (17) em função das variáveis  $\mathbf{z}$  e dos multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ , obtêm-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{z}}^T \mathcal{J} = \nabla_{\mathbf{z}}^T [\mathbf{w}^T \cdot \Psi + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c}] \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathcal{J} = \mathbf{c} \\ \nabla_{\mathbf{z}(t_0)}^T \mathcal{J} = \nabla_{\mathbf{z}(t_0)}^T [\Phi + \mathbf{w}^T \cdot \Psi + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c}] \\ \nabla_{\mathbf{z}(t_f)}^T \mathcal{J} = \nabla_{\mathbf{z}(t_f)}^T [\Phi + \mathbf{w}^T \cdot \Psi + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{c}] \end{cases} \quad (18)$$

Para os pontos candidatos  $[\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*]^T$  serem mínimos, é necessário que o gradiente da função objetivo (17) seja nulo sob eles, ou seja:

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{J}(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{J}(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0$$

Uma forma de iteração para se obter um vetor de pontos candidatos é aproximando as funções 18 por dois termos de uma série de Taylor:

$$0 = \mathbf{g}(\mathbf{z}) + (\mathbf{J}_z \mathbf{c})^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}_z \cdot (\mathbf{z}^* - \mathbf{z}) + (\mathbf{J}_z \mathbf{c})^T \cdot (\boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{\lambda}) \quad (19)$$

$$0 = \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_z \mathbf{c} \cdot (\mathbf{z}^* - \mathbf{z}) \quad (20)$$

Com:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{dz_1} + \mathbf{w}^T \cdot \frac{d\Psi}{dz_1} \\ \frac{d\Phi}{dz_2} + \mathbf{w}^T \cdot \frac{d\Psi}{dz_2} \\ \vdots \\ \frac{d\Phi}{dz_f} + \mathbf{w}^T \cdot \frac{d\Psi}{dz_f} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_z \mathbf{c} = \mathbf{c} \nabla_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{dc_1}{dz_1} & \frac{dc_1}{dz_2} & \dots & \frac{dc_1}{dz_f} \\ \frac{dc_2}{dz_1} & \frac{dc_2}{dz_2} & \dots & \frac{dc_2}{dz_f} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{dc_c}{dz_1} & \frac{dc_c}{dz_2} & \dots & \frac{dc_c}{dz_f} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_z \mathcal{J} = \nabla_{\mathbf{z}}^2 \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_1 \cdot dz_1} & \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_1 \cdot dz_2} & \dots & \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_1 \cdot dz_f} \\ \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_2 \cdot dz_1} & \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_2 \cdot dz_2} & \dots & \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_2 \cdot dz_f} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_f \cdot dz_1} & \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_f \cdot dz_2} & \dots & \frac{d^2 \mathcal{J}}{dz_f \cdot dz_f} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sendo os gradientes das funções  $\Phi$  e  $\Psi$  definidas como objetivo, e do conjunto de funções de restrições  $\mathbf{c}$  respectivamente.  $\mathbf{H}_z \mathcal{J}$  é a hessiana da função objetivo. Todos os gradientes e a hessiana são derivadas em função do vetor de variáveis  $\mathbf{z}$ .

Organizando (19) e (20) em forma matricial e desconsiderando o termo referente as restrições na primeira equação, é possível de se obter as condições de otimalidade para o caso discreto, comumente conhecidas como condições de *Karush-Kunh-Tucker* (KKT) e regem a direção para qual as iterações de controle ótimo irá seguir através de  $(\mathbf{z}^* - \mathbf{z})$  e  $(\boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{\lambda})$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_z \mathcal{J} & \mathbf{J}_z \mathbf{c} \\ \mathbf{J}_z \mathbf{c} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* - \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}(\mathbf{z}) \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (23)$$

É comum se resolver o sistema matricial (23) para apenas  $\boldsymbol{\lambda}^*$  desconsiderando o valor atual  $\boldsymbol{\lambda}$ . A matriz quadrada no lado esquerdo deve ser inversível para o sistema ter solução única

e ter um ponto candidato calculável. Após o cálculo dos vetores de direção, o ponto candidato é calculado e verificado através de equações análogas ao método indireto (8):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{z}^*) + (\mathbf{J}_{\mathbf{z}^*} \mathbf{c})^T \cdot \boldsymbol{\lambda}^* &= 0 \\ \mathbf{c}(\mathbf{z}^*) &= 0 \\ (\mathbf{z}^* - \mathbf{z})^T \cdot (\mathbf{H}_{\mathbf{z}^*} \mathcal{J}) \cdot (\mathbf{z}^* - \mathbf{z}) &> 0 \end{aligned} \quad (24)$$

que representam respectivamente as condições de gradiente nulo, restrições satisfeitas e hessiano definida positiva.

Limitações escritas no formato de inequações representam uma grande dificuldade para problemas de controle ótimo pois, ao contrário das restrições de igualdade descritas em 5, estas podem ou não influenciarem no ponto candidato, podendo ou não haver mais limitações que variáveis.

Uma maneira de se resolver problemas com inequações é o método Programação Quadrática Sequencial (SQP) (do inglês, *Sequential Quadratic Programming*) onde é resolvido uma série de equações no formato da equação matricial 23 para uma determinada sequência de limitações ativas de inequação. Se os multiplicadores dessas restrições de inequação atingirem valores negativos, significa que o vetor de respostas candidatas  $\mathbf{z}^*$  não fere os limites dessa, tornando-a uma restrição inativa.

A “atividade” das outras restrições são checadas avaliando se o passo  $(\mathbf{z}^* - \mathbf{z})$  não quebra nenhuma restrição inativa. Se esta o fizer, é usado o máximo valor possível do passo calculado e a restrição limitante é adicionada como uma restrição ativa. O problema é resolvido quando não há nenhuma inequação inativa interferindo no passo obtido por 23, e as condições 24 são satisfeitas a uma tolerância especificada.

Um conhecido solver que resolve problemas não lineares por iterações no formato SQP é o *Sparse Nonlinear Optimizer* (SNOPT), desenvolvido no trabalho apresentado em Gill, Murray e Saunders (2005). O SNOPT usa uma função objetivo modificada para verificar a convergência, além de funções de base reduzida (similares a 23) para o cálculo intermediário dos pontos candidatos por iterações tidas como “menores” pelo algoritmo. Quando as condições 24 são alcançadas, este faz a verificação do conjunto de equações inativas através do método SQP e completa uma iteração “maior”, encerrando quando não há interferência destas no passo calculado nas iterações menores.

Outro método de resolução usual para problemas com restrições dadas por inequação é o chamado método do ponto interior ou método de barreira. Essa forma de solução consiste em escrever as restrições dadas por inequações como igualdade e avaliar como objetivo o logaritmo desta. Ou seja, tendo um conjunto de restrições dadas por inequações na forma:

$$\mathcal{B}_i(\mathbf{z}) > 0 \quad \text{Para: } i = 1, 2, 3, \dots, b \quad (25)$$

A restrição é rescrita como:

$$\mathcal{B}(\mathbf{z}) = 0 \quad (26)$$

E acrescentada à função objetivo na forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \Xi) = \Psi(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{z}) - \Xi^T \ln(\mathcal{B}) \quad (27)$$

Sendo  $\Xi$  um vetor de pesos para as restrições dadas por inequações.

A função logaritmo tende a valores infinitos a medida que as restrições dadas por inequações tendem a zero. Essa característica funciona como uma barreira ao método de otimização, impedindo que os valores candidatos  $\mathbf{z}^*$  fiquem o conjunto de inequações 25. O vetor de pesos  $\Xi$  deve ter valores baixos para evitar que soluções próximas à barreira criada pela função logarítmica possam ser possíveis porém, tais valores podem tornar a função objetivo singular, eliminando a unicidade da resposta obtida por 23.

Então, um algoritmo por barreira utiliza valores elevados de  $\Xi$  para obter uma resposta inicial, reduzindo os mesmos quando houver convergência dos valores. Esse princípio de funcionamento pode ser comparado ao rolar de uma bola por um vale: esta é lançada em um patamar elevado e, aos poucos, é reduzido a situação de mínima energia provavelmente próximo a barreira. O programa geralmente é finalizado quando as condições 24 são atingidas e os pesos das inequações  $\Xi$  forem suficientemente baixos, seguindo uma tolerância.

Um solver *open-source* bastante usado na literatura é o *Interior Point Optimizer* (IPOPT) desenvolvido em Wächter e Biegler (2005). O IPOPT usa o método de *line-search* para resolver uma função objetivo dupla similar a 27. Um filtro é usado para calcular o passo usado em cada iteração junto com uma correção de segunda ordem nas equações do sistema matricial resultante das condições de KKT. O cálculo da equação matricial do passo do problema envolve a resolução de uma matriz não simétrica, complicando o processo. Esse problema é contornado retirando os passos referentes as inequações do sistema de matricial, adaptando seus valores por parâmetros extras. O passo referente as inequações é então calculado posteriormente seguindo uma função. A convergência é atingida quando o parâmetro de barreira é suficientemente pequeno e a norma das condições são satisfeitas para uma dada tolerância.

Neste trabalho será utilizado o solver IPOPT pois este possui uma melhor convergência a situações onde a resposta do sistema dinâmico é desconhecida ou quando os parâmetros iniciais não são muito próximos da resposta final.

Como o método direto de otimização só avalia a continuidade da dinâmica dos estados sob os pontos colocados, é necessário que exista  $m$  pontos suficientes para descrever bem a dinâmica sem haver erros excessivos nos intervalos da discretização temporal (10). Neste trabalho foi utilizada uma métrica para o cálculo do erro dos  $m - 1$  intervalos e pode ser encontrada com detalhes no apêndice B.1.

### 3.3 DIFERENCIAÇÃO AUTOMÁTICA

Para resolver as condições de KKT (equação 23), é necessário calcular a jacobiana e hessiana das restrições dinâmicas  $\Omega$  e da função objetivo  $\mathcal{J}$ . Ambas funções são entradas necessárias para a utilização do IPOPT, *solver* escolhido para este trabalho.

Há diversas maneiras de se calcular a jacobiana e a hessiana de uma função. A mais simples, é por meio de uma diferenciação numérica:

$$\frac{dh}{dz_i} = \frac{h(\mathbf{z} + \Delta \mathbf{z}_i) - h(\mathbf{z})}{\Delta} \quad (28)$$

onde  $\Delta \mathbf{z}_i$  é um vetor de mesmo tamanho que  $\mathbf{z}$  porém com um único valor não nulo  $\Delta$  na posição  $\mathbf{z}_i$ .

Esse método possui o problema de definir um passo  $\Delta$  que não seja tão grande a ponto da diferenciação ser imprecisa mas também nem tão pequeno a ponto de haver erros devido ao arredondamento de máquina.

Outro método seria diferenciar cada restrição dinâmica e função objetivo simbolicamente porém, para a quantidade de simulações e complexidade das mesmas, esse tipo de solução se torna problemática podendo levar a erros.

Assim, para esse trabalho foi utilizado o conceito de diferenciação automática, que se utiliza do princípio de regra da cadeia e sobreposição de funções do MATLAB<sup>®</sup> para o cálculo da jacobiana e hessiana.

O processo consiste em:

- a) Escrever a jacobiana e hessiana em função puramente das variáveis. Se o valor inicial é o próprio vetor de variáveis, a jacobiana resulta em uma matriz identidade e a hessiana em um conjunto de matrizes nulas;
- b) Para cada função utilizada no cálculo, resolver sequencialmente a regra da cadeia. Ex.:  $\mathbf{J}[\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z}))] = \text{diag} \left[ \frac{df(\mathbf{g}(\mathbf{z}))}{dz} \right] \mathbf{J}[\mathbf{g}(\mathbf{z})]$  onde:

$$\mathbf{J}[\mathbf{g}(\mathbf{z})] = \begin{bmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta z_1} & \dots & \frac{\delta g_1}{\delta z_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta g_n}{\delta z_1} & \dots & \frac{\delta g_n}{\delta z_f} \end{bmatrix}$$

O cálculo da hessiana é bem mais complexo que o da jacobiana pois, em controle ótimo, geralmente se trabalha com variáveis vetorizadas que, por mais que sejam independentes entre si (não há algum tipo de equacionamento direto entre eles, fora casos específicos como na integral), tornam a hessiana uma matriz de três dimensões.

Para contornar isso, os valores não nulos da hessiana foram guardados no formato de uma matriz acumulativa, que aumenta uma coluna para cada valor não nulo novo acrescentado por função. A posição do valor não nulo foi guardado em outros dois vetores representando

o índice de linha e coluna respectivamente. Esse método é similar ao da construção de uma matriz esparsa (SAAD, 2003).

Por exemplo, no caso da função anterior a hessiana é calculada por:

$$\mathbf{H}[\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z}))] = \text{diag} \left[ \frac{d^2 \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{z}^2} \right] \mathbf{J}^T[\mathbf{g}(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{J}[\mathbf{g}(\mathbf{z})] + \text{diag} \left[ \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{z}} \right] \mathbf{H}[\mathbf{g}(\mathbf{z})]$$

$$\mathbf{H}[\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z}))] = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

$\mathbf{H}_1$  pode ser calculado seguindo o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1 – Cálculo da hessiana através da multiplicação entre duas jacobianas

```

1 Entrada: Vetor  $\mathbf{z}$ 
2 Saída: Matriz  $\mathbf{H}_{1,p_{x1},p_{y1}}$ 
3 para cada função  $g_j \in \mathbf{g}$  faça
4   para cada termo não nulo  $z_i \in \mathbf{J}^T[g_j(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{J}[g_j(\mathbf{z})]$  faça
5      $\mathbf{H}_1(j,i) = z_i$ 
6      $p_{x1} = \text{procura}(z_i, \mathbf{J}^T[g_j(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{J}[g_j(\mathbf{z})], 1)$ 
7      $p_{y1} = \text{procura}(z_i, \mathbf{J}^T[g_j(\mathbf{z})] \cdot \mathbf{J}[g_j(\mathbf{z})], 2)$ 
8   fim
9 fim
10  $\mathbf{H}_1 = \text{diag} \left[ \frac{d^2 \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{z}^2} \right] \cdot \mathbf{H}_1$ 
11 retorna  $\mathbf{H}_{1,p_{x1},p_{y1}}$ 

```

$\mathbf{H}_2$  pode ser calculado diretamente da multiplicação:  $\text{diag} \left[ \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{z}))}{d\mathbf{z}} \right] \mathbf{H}[\mathbf{g}(\mathbf{z})]$ .

Esse método é muito menos custoso do que guardar  $p$  matrizes de  $n \times n$  com apenas alguns valores não nulo em cada.

A somatória do exemplo é calculada como uma concatenação do vetor/matriz resultante da primeira parte com a da segunda, ou seja:

$$\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2]$$

Para multiplicação entre vetores de funções colocadas no tempo, a resolução é igual a resposta escalar pois não há dependências cruzadas entre pontos colocados. Para a resolução de multiplicação entre matrizes colocadas há a preocupação em resolver o sistema de maneira escalar (a cada vetor de funções variáveis no tempo, que são independentes entre si), similar ao método apresentado no exemplo anterior.

## 4 METODOLOGIA

A propulsão de cadeiras de rodas convencionais possui elevado gasto energético para seus usuários, podendo gerar fadiga muscular devido ao movimento cíclico de propulsão e aos elevados torques proporcionados pelo ombro e cotovelo necessários para sua movimentação. Cadeiras com sistemas assistivos foram desenvolvidos na literatura para tentar reduzir esses esforços sem retirar totalmente o esforço físico da pessoa que, até determinado nível, é benéfico a saúde por evitar o sedentarismo. Essas cadeiras assistivas, conhecidas pela sigla PAPAW, possuem comumente assistência através de um torque constante ou proporcional a força do usuário que, embora reduza as forças produzidas pela pessoa em regime ou quando longos deslocamentos são necessários, pode ser prejudicial em relação a cadeira de rodas manual quando usado em lugares fechados ou na execução de manobras como o *wheelie*.

Neste trabalho estuda-se uma cadeira de rodas que se utiliza de um controle de impedância como assistência, fazendo com que a cadeira de rodas assistida se comporte como uma cadeira de rodas manual, com massa e atrito dinâmico definidos de tal forma que reduza bem o esforço físico da pessoa sem necessitar de um sistema eletro-dinâmico excessivamente potente.

A problemática de se obter os parâmetros de massa e coeficiente de atrito dinâmico do modelo de referência (modelo a ser imposto na cadeira de rodas assistida), *a priori*, parece ser de resolução óbvia: quanto menor a massa, menor serão as forças atuadas pela pessoa para se atingir uma velocidade considerável e, quanto menor o coeficiente de atrito dinâmico, menor será a queda de velocidade na fase de retorno (quando a mão da pessoa não está em contato com o aro de propulsão) o que evitaria a necessidade de se colocar maiores forças na cadeira de rodas. Essa resolução, entretanto, como será visto adiante, leva a picos elevados no torque do motor (para compensar a diferente massa) e a problemas quanto a manobrabilidade. Sendo assim, é necessário haver um equilíbrio entre tais parâmetros para a cadeira de rodas assistida ter um bom rendimento em comparação com as observadas no mercado.

A cadeira de rodas com assistência por impedância é um projeto ainda em processo de desenvolvimento, sendo assim impossível, no período desse trabalho, de se obter respostas experimentais para uma comparação direta entre as diferentes estratégias de assistências. Assim, nesse trabalho, foram feitas algumas simulações de controle ótimo preditivas que tentam descrever situações reais no qual o sistema de controle poderá encontrar no dia a dia para verificar se o controlador proposto é robusto o suficiente em manter o erro baixo sob tais condições, além de buscar algumas diretrizes sob a problemática dos parâmetros ideais sob essas condições simuladas.

Na metodologia do trabalho, faz-se primeiramente uma comparação entre o método de assistência por impedância com os outros observados no mercado usando um modelo de cadeiras de rodas simplificado de primeira ordem, cujo normalmente é utilizado na literatura. Na próxima seção, um modelo mais completo não linear envolvendo a dinâmica dos membros superiores da pessoa é desenvolvido e utilizado como base para o projeto do controlador envolvendo

o controle de impedância. Esse modelo já envolve a dinâmica cíclica de propulsão não observada pelo modelo de primeira ordem, utilizado como modelo de referência. As consequências da imposição de um modelo de primeira ordem linear são investigadas nas simulações, junto da problemática dos parâmetros e da variação da pessoa considerando um controlador fixo.

#### 4.1 ANÁLISE DAS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE ASSISTÊNCIA

Para se ter uma base de avaliação do sistema de controle proposto por impedância com as já existentes na literatura: com força constante e proporcional ao torque aplicado pelo usuário, foi resolvido um problema de controle ótimo para o modelo simplificado de primeira ordem utilizado comumente na literatura de controle em cadeiras de rodas assistidas.

Tal dinâmica foi escolhida para se ter uma primeira análise da eficiência de uma cadeira de rodas assistida por impedância em relação aos outros tipos de assistência vistos em outros trabalhos acadêmicos e/ou soluções comerciais.

Como na literatura terapêutica a força de resistência ao rolamento é bem importante na movimentação, esta será incluída ao modelo da equação 53, resultando em:

$$m \cdot \frac{dv_{real}}{dt} = f_h - b \cdot v_{real} - f_{rr} \cdot \text{sign}(v_{real}) \quad (29)$$

onde  $f_{rr}$  é a força de resistência ao rolamento que pode, tal como as outras variáveis, ser obtida através de uma análise experimental.

A dinâmica ilustrada em (29) infelizmente não leva em consideração a característica cíclica da propulsão da cadeira de rodas, onde as forças de tração são aplicadas em somente um trecho no movimento total dos membros superiores da pessoa, não havendo contato entre a mão do usuário e o aro de propulsão quando este retorna ao ponto inicial.

Por conta disso, admite-se nesta seção que  $f_h$  é a força aplicada por um cuidador para empurrar a cadeira de rodas de um ponto fixo até outro com distância e tempo total fixos. Em tal situação, o cadeirante em si não se movimenta em relação a cadeira de rodas, podendo o sistema multi corpo ser considerado como uma massa  $m$  concentrada.

Fixando as condições iniciais e finais da cadeira, tais como a distância e velocidade média do movimento, espera-se criar uma condição de simulação realista onde as características de cada tipo de assistência são ilustradas, tanto em condições de regime como em transição.

##### 4.1.1 Parâmetros do modelo

Os parâmetros  $b_{real}$  e  $f_{rr}$  foram obtidos empurrando uma PAPA do modelo *E-Motion* com a assistência desativada e liberada para desacelerar sob a influência única das forças resistivas. O perfil de velocidade depois de liberar a cadeira de rodas foi captado por uma câmera acoplada na cadeira de rodas.



Teoricamente, quando as forças de impulso na cadeira de rodas foram cessadas, a redução da velocidade no sistema foi causada unicamente pela energia perdida devido ao atrito de rolamento e dinâmico. Isso permitiu estimar  $b_{real}$  e  $f_{rr}$  usando:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{real} \\ f_{rr} \end{bmatrix} = -m_{real} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (30)$$

onde  $m_{real}$  foi adotado como 110 kg, que representa a somatória da massa da pessoa e a massa da cadeira de rodas. A aceleração em 30 foi obtida usando o método de diferenciação numérica de diferenças centrais:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (31)$$

para cada velocidade  $v_i$  com  $i = 2 \dots n - 1$  dentro do vetor  $\mathbf{v}$  de velocidades mensuradas.

Os valores  $b_{real}$  e  $f_{rr}$  podem então ser obtidos por:

$$\begin{bmatrix} b_{real} \\ f_{rr} \end{bmatrix} = -\text{pinv} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot m_{real} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (32)$$

com:

$$\text{pinv} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \right) = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}$$

sendo uma das formas de se calcular a pseudo-inversa da matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{bmatrix}$ .

Desenvolvendo as equações acima, foi possível obter os valores de  $b_{real} = 4,6 \text{ Ns/m}$  e  $f_{rr} = 8,9 \text{ N}$ .

As curvas em 9 mostram que os parâmetros conseguem dar aparentemente uma boa estimativa dos valores mensurados pela câmera.

Essa parametrização será utilizada apenas no tópico de comparação. Neste caso em específico, a força de propulsão é dada por um cuidador o que faz a dinâmica do sistema se aproximar bem de um modelo de primeira ordem devido ao fato de não haver uma dinâmica relativa entre pessoa/cadeira de rodas.

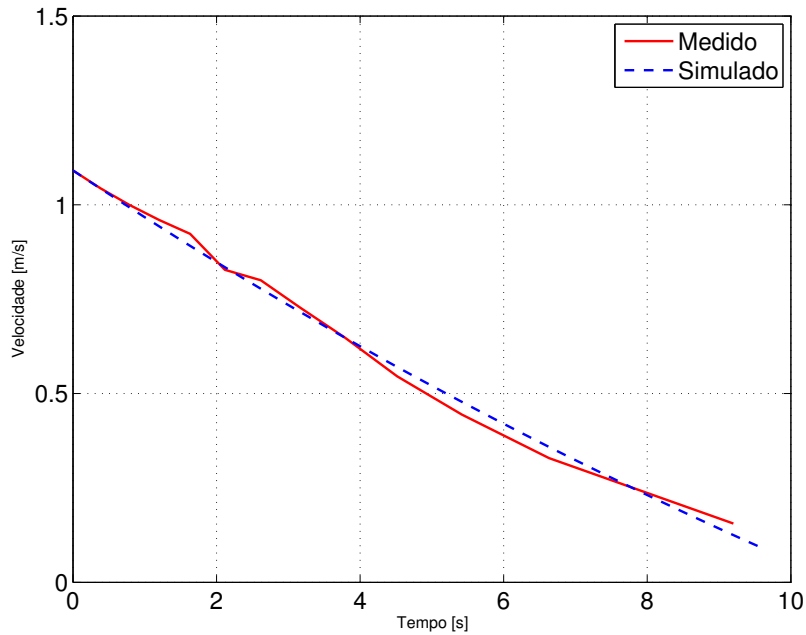
#### 4.1.2 Implementação de controle ótimo

Uma das principais preocupações no problema de controle ótimo era como comparar as assistências de uma maneira justa. Isso foi obtido limitando a energia consumida pelo motor (trabalho da força  $f_t$ ) enquanto se minimiza a força gasta pela pessoa através do funcional:

$$\min \mathcal{J} = \int_0^{t_i} f_b^2 dt \quad (33)$$

A função objetivo  $\mathcal{J}$  penaliza apenas a força aplicada pela pessoa, ao passo que a força gasta pelo motor no movimento é limitada indiretamente pela restrição da energia consumida pelo mesmo.

Figura 9 – Comparação entre os resultados simulados e medidos.



Fonte: Autor

A energia consumida pelo motor na fase de desaceleração, onde o trabalho é negativo, foi assumida como a energia dissipada durante a mesma. Essa consideração foi imposta para evitar que o motor regenere a energia gasta na aceleração no momento da frenagem, reduzindo os efeitos do regime transiente no qual se deseja analisar nesta seção. Sendo assim, o trabalho feito pelo motor neste caso resulta em:

$$E(f_t, v) = \int_0^{t_f} |f_t \cdot v| dt \quad (34)$$

Onde a força aplicada pelo motor ( $f_t$ ) segue aproximadamente a tendência da aceleração da cadeira de rodas, que neste caso será positiva no início do movimento e negativa no final. Para evitar de utilizar diretamente a função módulo que não é diferenciável no ponto nulo, pode-se dividir a simulação em duas fases, onde na primeira a aceleração admite valores positivos ou nulos ( $\dot{v} \geq 0$ ) e na segunda negativos ou nulos ( $\dot{v} \leq 0$ ).

O valor máximo da energia consumida pelo motor deve ser tal que evite respostas impossíveis de serem aplicadas na prática como, por exemplo, respostas baseadas em impulso infinito. Para isso foi resolvido uma simulação de controle ótimo utilizando as condições de contorno descritas em (35), que se baseia em uma cadeira de rodas sob ação exclusiva do motor ( $f_h = 0$ ) e função objetivo baseada na energia ao invés da força.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \int_0^{t_f^{(1)}} \left( m_{real} \cdot \frac{dv}{dt} + b_{real} \cdot v \right) \cdot v \, dt + \int_{t_f^{(1)}}^{t_f^{(2)}} \left( -m_{real} \cdot \frac{dv}{dt} + b_{real} \cdot v \right) \cdot v \, dt \\
\text{s.t.} \quad & \frac{dy}{dt} = v \\
& \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m_{real}} (f_{\text{t}} - b_{real} \cdot v - f_{rr}) \\
& \frac{dv}{dt} \in \begin{cases} [0, \infty] & \text{para fase de aceleração} \\ [-\infty, 0] & \text{para fase de desaceleração} \end{cases} \\
& y(0) = 0 \\
& y(t_f) = 10 \\
& v(0) = 0 \\
& v(t_f) = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

onde  $t_f^{(1)}$  representa o tempo final da primeira fase e  $t_f^{(2)}$  ( $t_f^{(2)} > t_f^{(1)}$ ) o tempo final da segunda fase, ambas obtidas através da resolução do problema de otimização.

Essa simulação deve ter o menor valor de energia gasta dentre todas as simulações para garantir que não haja energia suficiente a ponto da pessoa aplicar forças desprezíveis. Uma maneira de garantir isso, é considerar que o motor entregaria no caso das assistências, apenas três quartos da energia total, ou seja:

$$W = \frac{3}{4} \int_0^{t_f} (f_{\text{t}} \cdot v) \, dt \tag{36}$$

Esse fator foi adotado por ser uma taxa proporcional comum de assistência ((GUILLON et al., 2015) e (COOPER et al., 2002)).

Resolvendo o problema de controle ótimo usando as condições de contorno (35) resulta em  $W = 164,6 \text{ J}$ .

Com todas essas considerações, o problema final de controle ótimo é ilustrado por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \int_0^{t_f} f_{\text{t}}^2 \, dt \\
\text{s.t.} \quad & \frac{dy}{dt} = v \\
& \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m_{real}} (f_{\text{t}} + f_{\text{t}}(f_{\text{t}})) - \frac{b_{real}}{m_{real}} \cdot v \\
& \quad - \frac{f_{rr}}{m_{real}} \cdot \tanh(1000 \cdot v) \\
& E(f_{\text{t}}, v) \leq W \\
& \frac{dv}{dt} \in \begin{cases} [0, 3] & \text{para fase de aceleração} \\ [-3, 0] & \text{para fase de desaceleração} \end{cases} \\
& y(0) = 0 \\
& y(t_f) = 10 \\
& v(0) = 0 \\
& v(t_f) = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

onde  $t_f = 10/0.9$  s (a cadeira de rodas trafega por 10 m com uma velocidade média de 0,9 m/s),  $E(f_\tau, v)$  é a energia consumida pelo motor,  $W$  é o limite máximo da energia gasta pelo motor definida anteriormente e  $f_\tau = f_\tau(f_h)$  representa a estratégia de controle em cada caso.

A aceleração da cadeira de rodas foi limitada na faixa  $[-3, 3]$   $m/s^2$ , que é um intervalo plausível para situações no cotidiano (KARMARKAR et al., 2008). Essa faixa foi colocada para evitar que acelerações excessivas sejam aplicadas no sistema da cadeira de rodas, pois algumas das assistências testadas podem ter tendência ao uso de máxima aceleração nos extremos, onde a velocidade é próxima de zero e não há, pela fórmula da energia (34) um gasto elevado. A função hiperbólica foi introduzida para aproximar a função sinal na equação 29 e manter um modelo contínuo em  $v = 0$ .

Todos os problemas de controle ótimo foram resolvidos usando 200 pontos de colocação com os mesmos valores iniciais, que é a solução do problema 37 com  $f_\tau = 0$ .

Dois pacotes de controle ótimo baseados no método pseudo-espectral foram usados: GPOPS-II (PATTERSON; RAO, 2014) e PROPT (RUTQUIST; EDVALL, 2010). Outro programa foi desenvolvido usando o método trapezoidal descrito em (BETTS, 2010) através do solver IPOPT.

### 4.1.3 Descrição das assistências

Para que as análises de controle ótimo tenham respostas realistas, é necessário que as assistências possuam comportamento similar ao da realidade, com respostas dinâmicas similares ao do modelo real.

Nesta seção serão ilustrados os métodos de modelagem de cada uma das três assistências avaliadas neste tópico, tal como restrições mais específicas como o formato da restrição de energia.

#### 4.1.3.1 Assistência constante

O primeiro tipo de assistência (e mais simples de ser aplicado) é descrito por uma força constante aplicada pelo motor quando o usuário aplica uma força no raio de tração suficiente para ativar a mesma. A força assistiva e o limiar são ambos ajustáveis pelo usuário.

Matematicamente, a expressão da força do motor ( $f_\tau$ ) é expressada por:

$$f_\tau(f_h) = \begin{cases} K_1 & \text{para } f_h > Th \\ 0 & \text{para } |f_h| \leq Th \\ -K_1 & \text{para } f_h < -Th \end{cases} \quad (38)$$

onde  $K_1$  é a força aplicada pelo motor e  $Th$  é o limiar.

A expressão 38 não é diferenciável em  $Th$  e  $-Th$ . Esse tipo de situação não é efetiva em otimizadores baseados em gradientes. Uma simples solução para esse problema é desprezar o limiar e aproximar a função sinal por uma função hiperbólica:

$$f_t(f_h) = K_1 \cdot \tanh(f_h) \quad (39)$$

A energia gasta pelo motor é:

$$\begin{aligned} E(f_h, v) &= \int_{t_0}^{t_f} |f_h \cdot v| \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} K_1 \cdot |\tanh(f_h) \cdot v| \, dt \\ &\approx \int_{t_0}^{t_f} K_1 \cdot v \, dt \end{aligned} \quad (40)$$

Como  $K_1 > 0$  e  $v \geq 0$ :  $\tanh(f_h) \approx \text{sign}(f_h)$ .

As equações 39 e 40 são diferenciáveis.

#### 4.1.3.2 Assistência proporcional

Nesse tipo de assistência, o motor multiplica a força aplicada pelo usuário no raio de tração, resultando em:

$$f_t(f_h) = K_2 \cdot f_h \quad (41)$$

onde  $K_2$  é o fator de proporcionalidade.

Esse tipo de assistência foi um dos primeiros projetados na literatura (COOPER et al., 2002) na tentativa de fazer uma PAPA que seja intuitiva ao usuário.

Para a assistência proporcional, a energia consumida pelo motor pode ser escrita em função da força aplicada pelo usuário (42) ou, isolando a força da pessoa na equação da força do motor, pode ser escrita como em (43).

$$\begin{aligned} E(f_h, v) &= \int_{t_0}^{t_f} |f_h \cdot v| \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} |K_2 \cdot f_h \cdot v| \, dt \end{aligned} \quad (42)$$

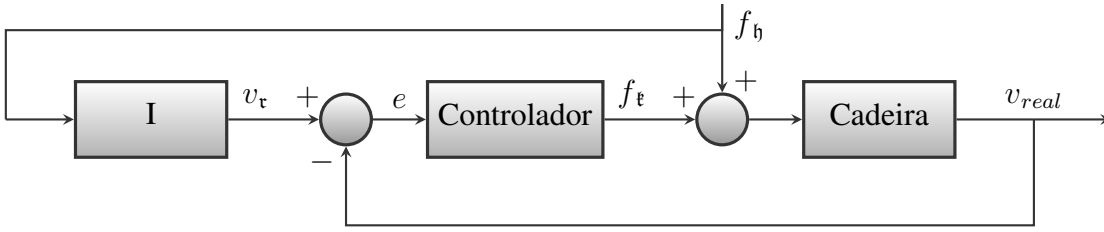
$$\begin{aligned} E(f_h, v) &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{K_2}{1 + K_2} \left( m_{real} \cdot \left| \frac{dv}{dt} \right| \right. \\ &\quad \left. + b_{real} \cdot v + f_{rr} \cdot \tanh(1000 \cdot v) \right) v \, dt \end{aligned} \quad (43)$$

Porque  $m_{real}, b_{real}, K_2, f_{rr} > 0$ .

#### 4.1.3.3 Assistência por controle de impedância

O controle de impedância aplicado sob o sistema simplificado é ilustrado na figura 10:

Figura 10 – Diagrama da assistência por impedância.



Fonte: Autor

Admitindo  $m_{real}$ ,  $b_{real}$  e  $f_{rr}$  invariantes e conhecidos, é possível de se escrever as equações para o método da impedância como em (44), o que resulta para o caso ideal em uma dinâmica final como em:

$$\begin{cases} f_t = m_{real} \cdot \frac{dv}{dt} + b_{real} \cdot v + f_{rr} \cdot \tanh(1000 \cdot v) - f_b \\ f_t = (m_{real} - m_\tau) \cdot \frac{dv}{dt} + (b_{real} - b_\tau) \cdot v \\ \quad + (f_{rr} - f_{ri}) \cdot \tanh(1000 \cdot v) \end{cases} \quad (44)$$

$$f_t = m_\tau \cdot \frac{dv}{dt} + b_\tau \cdot v + f_{ri} \cdot \tanh(1000 \cdot v) \quad (45)$$

$$[m_\tau, b_\tau, f_{ri}]^T \leq [m_{real}, b_{real}, f_{rr}]^T \quad (46)$$

nessa formulação:  $v = v_{real} = v_\tau$ .  $m_\tau$  é a massa do modelo de referência,  $b_\tau$  o coeficiente de atrito dinâmico do modelo de referência e  $f_{ri}$  a força de resistência ao rolamento do modelo de referência.

A energia consumida pelo motor é dada por:

$$\begin{aligned} E(f_t, v) &= \int_{t_0}^{t_f} |f_t \cdot v| dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ (m_{real} - m_\tau) \cdot \left| \left( \frac{dv}{dt} \right) \right| + (b_{real} - b_\tau) \cdot v \right. \\ &\quad \left. + (f_{rr} - f_{ri}) \cdot \tanh(1000 \cdot v) \right] \cdot v dt \end{aligned} \quad (47)$$

Aplicando as condições 46, a mesma situação vista na equação 43 é vista em 47.

#### 4.1.4 Resultados

As tabelas 1, 2 e 3 mostram os resultados ótimos para a função custo  $\mathcal{J}$  (equação 37) e parâmetros do controlador obtidos pelas três assistências usando os três programas de controle ótimo.

Tabela 1 – Resultados encontrados para o caso de assistência constante.

Assistência constante		
Programa utilizado	$\mathcal{J} [N^2 \cdot s]$	$K_1 [N]$
Método trapezoidal	4201,06	16,46
PROPT	4202,05	16,46
GPOPS-II	4193,08	16,46

Fonte: Autor.

Tabela 2 – Resultados encontrados para o caso de assistência proporcional.

Assistência proporcional		
Programa utilizado	$\mathcal{J} [N^2 \cdot s]$	$K_2$
Método trapezoidal	2115,98	1,87
PROPT	2124,61	1,85
GPOPS-II	2120,33	1,85

Fonte: Autor.

Tabela 3 – Resultados encontrados para o caso de assistência por impedância.

Assistência por controle de impedância				
Programa utilizado	$\mathcal{J} [N^2 \cdot s]$	$m_r [kg]$	$b_r [Ns/m]$	$f_{ri} [N]$
Trapezoidal	383,02	1,00	4,60	1,66
PROPT	398,73	1,06	4,60	1,78
GPOPS-II	398,13	1,02	4,60	1,78

Fonte: Autor.

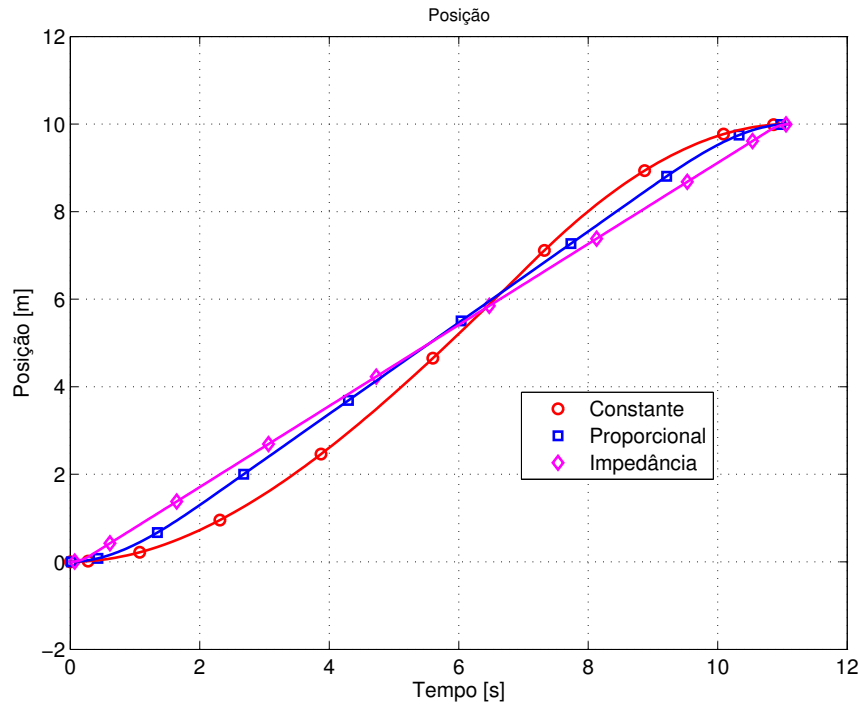
As figuras 11, 12, 13 e 14 mostram as respostas ótimas de posições, velocidades, força aplicada pelo usuário e força aplicada pela força do motor respectivamente.

Todas as estratégias consumiram a mesma quantidade de energia para o motor o que garantiu uma comparação justa. Mesmo com essa condição, as respostas foram bem diferentes dependendo da assistência implementada. Um fator interessante é que as respostas de assistência constante e de impedância lembram respostas típicas de mínima força e mínima energia respectivamente. Isso implica que o controle de impedância usa sua energia de uma forma mais eficiente, resultando no menor funcional ótimo dentre as três estratégias.

A assistência constante necessita de uma força constante que precisa ser baixa para que a restrição de máxima energia gasta seja satisfeita. Isso implica que grande parte da força necessária para acelerar e frear a cadeira de rodas precisa vir do usuário, como consequência, mínimas acelerações não preferíveis entregando uma resposta quase linear como é vista na figura 13.

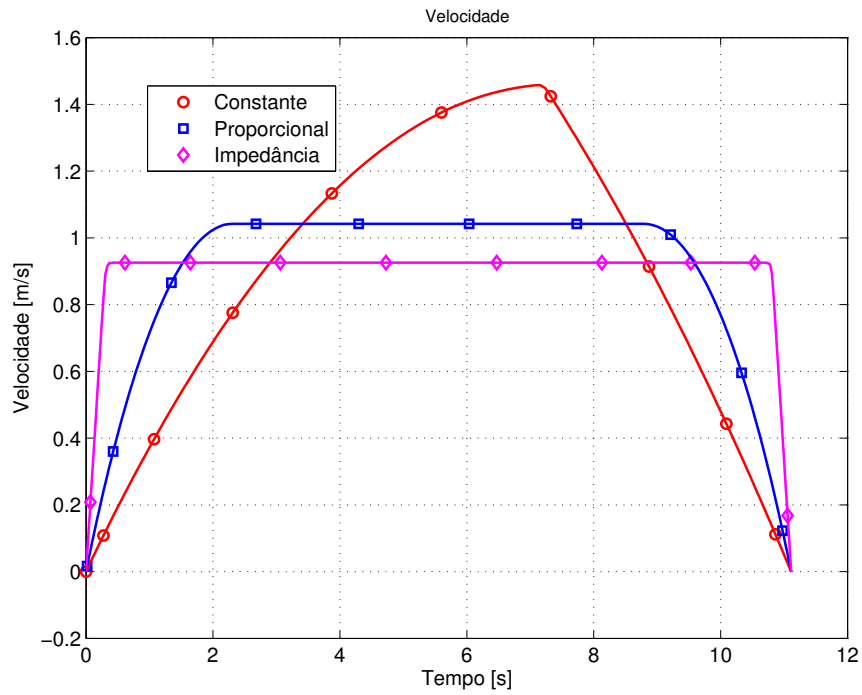
A assistência proporcional por sua vez, não necessita de uma força constante, permitindo uma relativa baixa força em regime estacionário (figura 13), permitindo um maior uso

Figura 11 – Posições ótimas para os três casos de assistência.



Fonte: Autor.

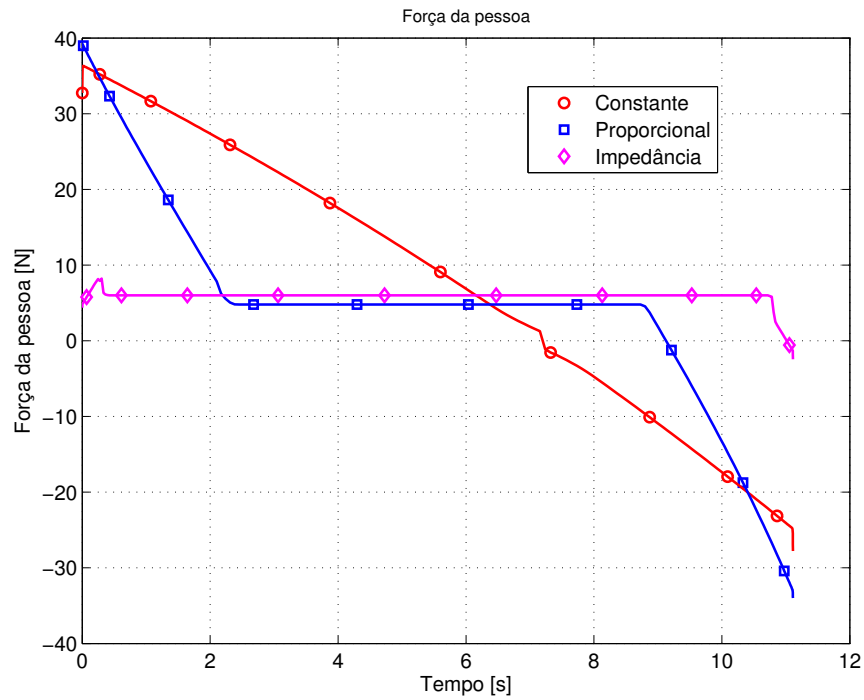
Figura 12 – Velocidades ótimas para os três casos de assistência.



Fonte: Autor.

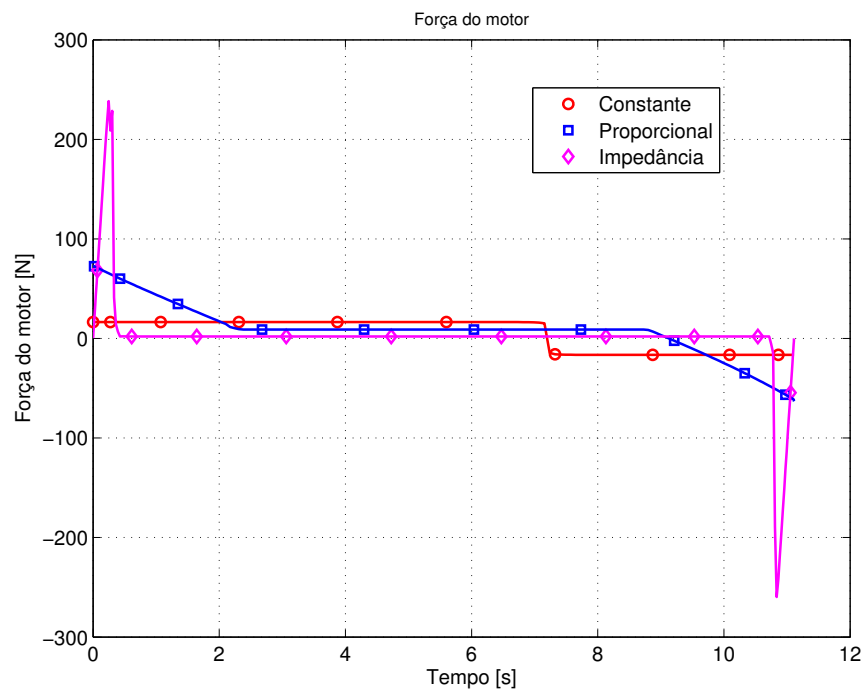


Figura 13 – Força do usuário ótimas para os três casos de assistência.



Fonte: Autor.

Figura 14 – Força do motor ótimas para os três casos de assistência.



Fonte: Autor.

nos extremos da aceleração e desaceleração onde o esforço do usuário é maior. Isso pode ser visto como uma redução proporcional aparente nos parâmetros do sistema (uma redução de impedância aparente). Porém, esses parâmetros são sempre reduzidos de forma igual mantendo a constante de tempo no mesmo valor, isso é equivalente a dizer que o regime transiente da resposta não é afetada pela assistência proporcional. Portanto, esse tipo de assistência é ideal em regime constante quando a força aplicada pelo usuário é mínima (figura 13) porém, pode ser inefetiva em regimes transientes.

O controle de impedância neste caso pode ser visto como uma extensão do controle proporcional, de modo que este permite modificar a massa aparente, o coeficiente de atrito viscoso aparente e a força de resistência ao rolamento aparente de forma independente, podendo alterar as respostas transitórias e de regime permanente. O coeficiente de atrito viscoso permaneceu o mesmo enquanto a massa aparente foi alterada bruscamente (tabela 3), reduzindo a constante de tempo. Isso permitiu acelerações rápidas ao custo de forças maiores aplicadas pelo motor em curtos períodos de tempo, essa característica é importante para o dia a dia de um cadeirante pois tais situações comumente estão longe do regime permanente.

Em regime, não há vantagens significativas entre os métodos.

Tanto na assistência proporcional quanto na de impedância a resistência ao rolamento  $F_r$ , devido a sua natureza constante, apenas translada a força em regime, não havendo maiores influências na dinâmica final do sistema. A assistência constante, devido a sua natureza similar, é mais afetada pela força de resistência ao rolamento, que auxilia o usuário na frenagem (por ser uma força resistiva que diminui a velocidade da cadeira como um todo) e prejudica na aceleração.

No geral, o controle por impedância teve um resultado melhor que o proporcional e constante para uma mesma energia gasta pelo motor. Uma possível desvantagem desta assistência em comparação com as outras é a aparente necessidade do motor atuar com picos curtos de torques elevados, coisa que não ocorre com as outras assistências. Essas análises infelizmente não são muito categóricas para julgar plenamente a eficiência de um meio perante a outro pois, tal como discutido no início da seção, ela não leva em consideração a não linearidade introduzida no sistema pelo movimento dos membros superiores da pessoa, além de não levar em consideração o fator cíclico da propulsão de uma cadeira de rodas. Entretanto, ela passa uma ideia de que o controle por impedância pode ser um candidato eficiente como meio de assistência em uma cadeira de rodas híbrida, e isso é um fator que incentiva essa pesquisa.

## 4.2 MODELAGEM DA CADEIRA DE RODAS

Para desenvolver de maneira eficiente a assistência por impedância e o controlador projetado, é necessário ter um modelo matemático fiel e representativo do sistema mecânico formado pela cadeira de rodas e usuário, a fim de se obter as dinâmicas principais do movimento

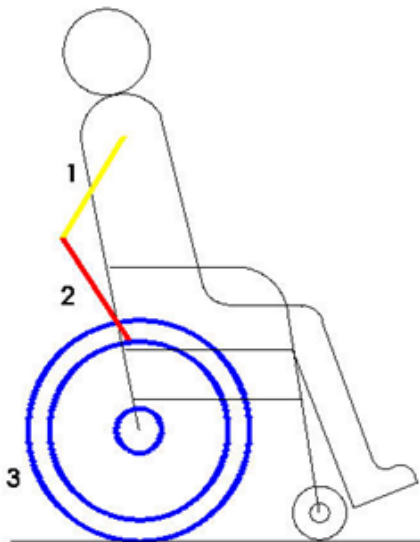
e verificar possíveis influências de polos dinâmicos não modelados, cujas análises anteriores foram incapazes de obter.

Para deslocamentos longitudinais, o modelo a ser usado para simulações foi obtido obedecendo as seguintes hipóteses simplificadoras:

- a) O sistema mecânico formado pela cadeira de rodas e usuário só se desloca no plano longitudinal, tornando o problema planar;
- b) O movimento relativo causado pela mão do usuário será desprezado. O braço será conectado à roda por meio de uma junta de revolução na fase de propulsão;
- c) O braço e o antebraço serão considerados como dois corpos rígidos;
- d) Não há movimentação relativa entre o ombro e a cadeira de rodas;

Considerando todas as hipóteses anteriores, o sistema dinâmico descrito pela cadeira de rodas e usuário pode ser modelado, tal como descrito em Ackermann et al. (2014), como um sistema cinemático envolvendo quatro barras sendo que duas representam os membros superiores da pessoa, a terceira, o par de rodas traseiras da cadeira de rodas e a quarta uma barra fictícia entre o ombro da pessoa e o centro das rodas traseiras da cadeira. Esse modelo está ilustrado nas figuras 15 e 16.

Figura 15 – Modelo destacando os movimentos de barras do sistema.



Fonte: Autor

Na figura 15: 1) é o antebraço do usuário, 2) é o braço e 3) são rodas traseiras da cadeira de rodas.

As hipóteses adotadas anteriormente são coerentes com trabalhos como o de Rozendaal, Veeger e L.H.V. van der Woude (2003), onde se verificou que a força normal ao plano sagital possui pequeno módulo em relação as outras componentes.

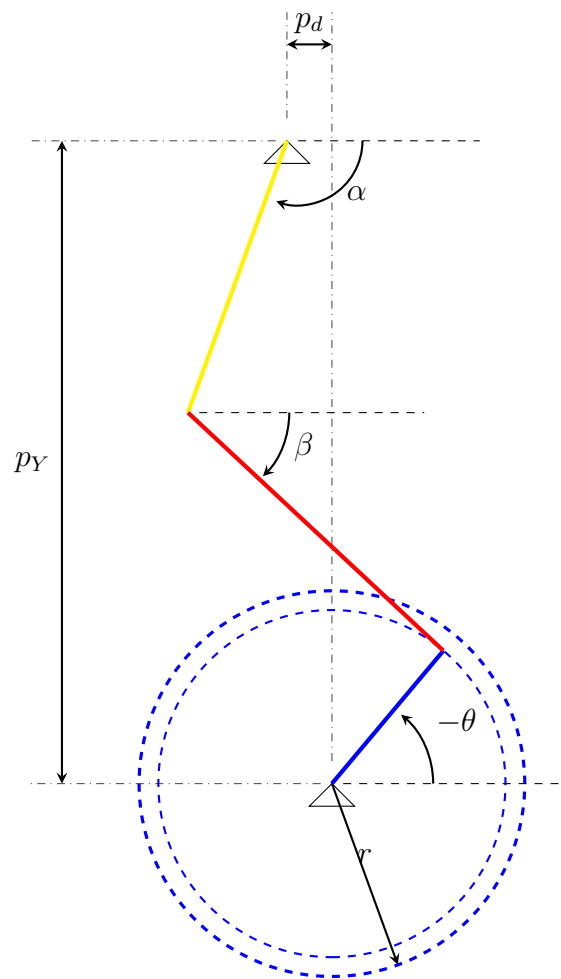
Serão definidos como coordenadas principais três estados, sendo eles: 1) o ângulo do antebraço do usuário com o eixo horizontal, 2) o ângulo do braço com o eixo horizontal, 3) o deslocamento angular das rodas traseiras da cadeira. Isso forma o vetor de coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (48)$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  o ângulo do antebraço e braço respectivamente.

Estes ângulos estão melhor representados na figura 16.

Figura 16 – Modelo de quatro barras.



Fonte: Autor

Quando a pessoa aplica a força no aro de propulsão, há a criação de dois vínculos cinemáticos, descritos por:

$$\mathbf{c} = \begin{cases} p_A \cos \alpha + p_B \cos \beta - (r_2 \cos \theta + p_d) = 0 \\ p_A \sin \alpha + p_B \sin \beta - (r_2 \sin \theta + p_Y) = 0 \end{cases} \quad (49)$$

onde  $p_A$  é o comprimento do antebraço da pessoa,  $p_B$  é o comprimento do braço,  $p_d$  é a distância horizontal e  $p_Y$  a distância vertical entre o ombro eo eixo das rodas traseiras da cadeira.

Esses vínculos reduzem o sistema dinâmico original da cadeira de rodas para apenas um grau de liberdade, definido por  $\theta$ .

A distância percorrida pelo sistema pode ser aproximada (desprezando escorregamento) por:

$$y = (\theta - \theta_0) \cdot r \quad (50)$$

sendo  $\theta_0$  o ponto inicial de contato entre a mão e o aro de propulsão,  $\theta$  a variação angular da rodas pelo tempo e  $r$  o raio das rodas traseiras da cadeira de rodas.

Há diversas maneiras de se obter as equações do movimento de sistemas com cadeia cinemática fechada, como o formalismo de Euler-Lagrange ou o de Newton-Euler. Uma dessas formas é descrita em Calva-Yáñez et al. (2013), onde o sistema é reduzido a apenas uma coordenada generalizada.

Para esse trabalho foi usado o formalismo de Newton-Euler sob as variáveis generalizadas (48). Isso cria um sistema de três equações que possuem forma similar a:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_m \end{bmatrix} \quad (51)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $[f_{x3}, f_{y3}]$  são as forças horizontais e verticais aplicadas pela pessoa no aro de propulsão,  $\mathbf{k}_g$  o vetor de forças gravitacionais,  $\mathbf{k}_r$  o vetor de forças resistivas,  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  e  $\mathbf{K}_3$  matrizes de funções auxiliares dependentes de  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  os torques aplicados no ombro e no cotovelo respectivamente.

O desenvolvimentos das equações 51 pode ser visto no apêndice A deste trabalho.

Em (51), o termo definido por  $\mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix}$  representa a força de reação devido a cinemática fechada do sistema. Essa força pode ser vista como os multiplicadores de Lagrange da equação durante a fase de propulsão da cadeira de rodas, sendo nulas durante o movimento de retorno.

A matriz jacobiana dos vínculos cinemáticos são obtidas automaticamente no processo de Newton-Euler mas também pode ser entendida como (para vínculos esclerônomos):

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{K}_2^T \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (52)$$

onde  $\mathbf{c}$  representa o vetor de vínculos cinemáticos (49) do problema.

Uma das forças mais influentes em uma cadeira de rodas é a força de resistência ao rolamento, que é gerada devido a atritos internos presentes nos rolamentos das rodas e pela histerese dos pneus (L.H.V van der WOUDE et al., 2001). No trabalho de Pavlidou et al. (2015) foi demonstrado que a força de resistência ao rolamento é altamente dependente do nível de pressão dos pneus da cadeira, principalmente em cadeiras de rodas assistidas. É discutido que essa dependência pode ter sido causada pelos atritos internos acrescentados com a presença do motor, além da maior massa das rodas.

Outro estudo sob a força de resistência ao rolamento é o de Chua, Fuss e Subic (2011) onde foi demonstrado que em cadeiras de rodas usadas para a prática de rugby, a força de resistência ao rolamento é composta de três fatores: uma parte constante e independente, uma parte dependente da velocidade da cadeira e uma força inercial gerada no início do movimento.

Será usado no modelo de quatro barras em (51) como força de resistência ao rolamento, uma força constante e independente da velocidade, seguindo valores que podem ser obtidos em L.H.V van der Woude et al. (2001).

A aplicação direta do modelo de quatro barras descrito nas equações 51 cria um problema para o sistema de controle: geralmente, não se conhece o ponto inicial de aplicação do torque pela pessoa ( $\theta_0$  na equação 50), esse ponto é necessário para se obter todas as variáveis generalizadas por se tratar de um sistema não-autônomo. Na fase de retorno esse problema é agravado: não há ligação dinâmica direta entre a velocidade percorrida pela cadeira de rodas e os dois ângulos dos membros superiores da pessoa  $[\alpha, \beta]$ , sendo necessário o uso de sensores para tornar todos os estados observáveis.

Tal como discutido na revisão da literatura e fundamentação teórica, grande parte dos trabalhos acadêmicos encontrados consideram a cadeira de rodas como um modelo simples de primeira ordem, no formato:

$$m \cdot \frac{dv_{real}}{dt} = f_h - b \cdot v_{real} \quad (53)$$

onde  $m$  é a massa do sistema,  $v_{real}$  a velocidade longitudinal da cadeira de rodas,  $b$  o coeficiente de atrito dinâmico e  $f_h$  a força aplicada pelo usuário na cadeira.

Por conveniência e argumentação com a literatura de controle de cadeira de rodas, será utilizado o modelo de primeira ordem da equação 53 como base para o projeto do controlador.

### 4.3 DESENVOLVIMENTO DO CONTROLADOR

Para a cadeira de rodas assistida com controle de impedância atuar de maneira satisfatória, é necessário que o controlador seja bem projetado, de modo que nas mais variadas situações que o sistema dinâmico possa encontrar a dinâmica desejada esteja sendo imposta.

Uma hipótese simplificadora adotada para esse desenvolvimento é a redução do sistema não linear desenvolvido na seção anterior em um sistema linear representativo. Essa hipótese

foi determinada para que o desenvolvimento do controlador possa se utilizar de técnicas mais conhecidas e amplamente discutidas na literatura.

Como um sistema não-linear é de difícil análise em termos de sua robustez, principalmente na cadeira de rodas onde o modelo possui diferenças entre as duas fases de propulsão, a ferramenta de controle ótimo foi utilizada tanto para se ter uma ideia de como cada parâmetro influencia nas respostas e formas da pessoa aplicar a força, como também para verificar se o controlador, com todas as hipóteses abordadas, é capaz de manter o erro pequeno em variadas situações.

### 4.3.1 Modelo do controlador

Nesta seção serão discutidos os métodos para a simplificação do modelo de quatro barras visto anteriormente em um modelo de primeira ordem para fins do projeto do controlador em malha fechada.

O resultado esperado do modelo de projeto do controlador é que este consiga expressar razoavelmente bem as dinâmicas do sistema original possibilitando o controlador projetado de agir de forma eficaz sob todo o ciclo de propulsão da cadeira de rodas pelo usuário.

O modelo de quatro barras da equação 51 possui, tal como discutido, o problema das dinâmicas de movimento dos membros superiores da pessoa serem não lineares e de difícil medição, impossibilitando assim a utilização de uma estratégia de controle básica como a realimentação de estados.

As estratégias de controle encontradas na literatura que envolvem a dinâmica da cadeira de rodas, geralmente, se utilizam de controladores em malha aberta (HWANG; C.-H. LEE; BANG, 2012) ou não se preocupam com a redução de um erro, usando o controlador apenas como uma dinâmica extra que contribui para a movimentação da cadeira de rodas (OH; HORI, 2015).

Observando a equação dinâmica do sistema de quatro barras expandida (51), um modelo no formato da equação 53 pode ser conseguido eliminando os efeitos das velocidades dos membros superiores, tal como forças resistivas de rolamento e de rampa que seriam tidas como perturbações no sistema real ( $f_d$  na figura 17).

Reescrevendo o sistema de quatro barras desenvolvido no primeiro apêndice:

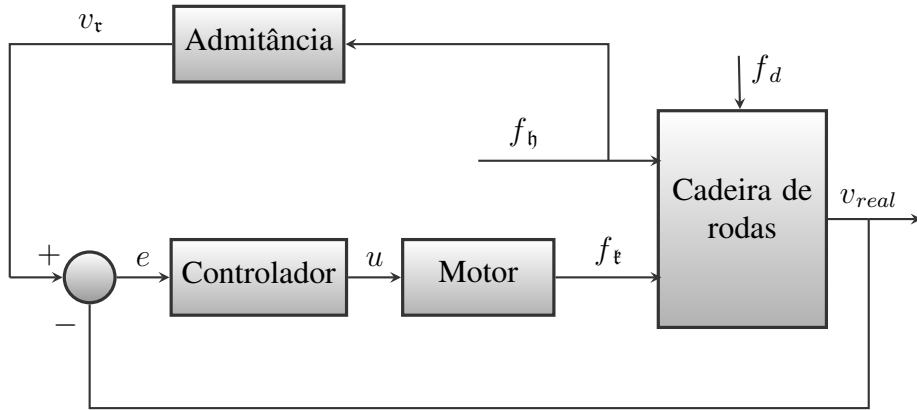
$$M \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} = \mathbf{k}_e$$

Esse sistema pode ser reescrito no formato de espaço de estados simplesmente invertendo a matriz de massa e passando o vetor de forças de Coriolis  $\mathbf{k}$  para o lado direito:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1} \cdot (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}) \quad (54)$$

Usando como estados as variáveis generalizadas  $\mathbf{q}$  e suas velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$ , o sistema de equações 54 forma um espaço de estados.

Figura 17 – Diagrama de blocos do sistema mecânico da cadeira de rodas.



Fonte: Autor.

Para o problema da cadeira de rodas assistida, geralmente as medidas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  é desconhecida, ficando disponível apenas a informação da velocidade da cadeia que, desprezando o escorregamento, é correlacionada com a velocidade angular das rodas traseiras  $\dot{\theta}$ , cuja derivada é descrita pela última equação do sistema (54).

Pela definição de matriz inversa:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}_{3,:}^{(adj)} \cdot (\mathbf{k}_{e3} - \mathbf{k}_3) \quad (55)$$

$$\mathbf{M}^{(adj)} = \text{adj}(\mathbf{M})$$

Sabe-se que o vetor de forças externas  $\mathbf{k}_e$  e o vetor de forças centrípetas e de Coriolis  $\mathbf{k}$  pode ser dividido em:

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix}$$

onde  $f_{y3}$  e  $f_{x3}$  são as forças de contato das mãos do cadeirante com o aro de tração e  $\tau_2$  e  $\tau_1$  são os torques aplicados pela pessoa.

Aplicando-se a matriz inversa sobre o sistema dinâmico expandido e sabendo que todas as matrizes auxiliares  $[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3]$  são dependentes apenas de  $\alpha$  e  $\beta$  (vide primeiro apêndice), pode-se escrever a equação dinâmica do movimento longitudinal da cadeira de rodas na forma:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \left[ \mathbf{h}_\tau(\alpha, \beta)^T \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{h}_c(\alpha, \beta)^T \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} - \mathbf{h}_v(\alpha, \beta)^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + h_r(\alpha, \beta, f_{rr}, \eta) + h_p(\alpha, \beta) \cdot (\tau_\natural + f_\natural r_2 - b \cdot r^2 \dot{\theta}) \right] \quad (56)$$

onde  $f_\natural$  é a força tangencial de contato da pessoa medida diretamente no aro de propulsão da cadeira de rodas. Esta também pode ser escrita como:

$$f_\natural = f_{y3} \cdot \cos \theta - f_{x3} \cdot \sin \theta$$

válido se  $\theta$  (ângulo de aplicação da força) for conhecido, situação inviável devido a falta de conhecimento da posição inicial de contato da pessoa na propulsão da cadeira de rodas.

$\mathbf{h}_\tau, \mathbf{h}_c, \mathbf{h}_v, h_r, h_p$  são funções e vetores de funções dependentes primariamente de  $\alpha$  e  $\beta$  geradas pela multiplicação entre a matriz adjunta da matriz de massa  $\mathbf{M}^{(adj)}$  e as matrizes auxiliares definidas anteriormente.

Considerando como torque de perturbação  $\tau_d$ :

$$\tau_d = \frac{1}{h_p(\alpha, \beta)} \left[ \mathbf{h}_\tau(\alpha, \beta)^T \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{h}_c(\alpha, \beta)^T \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \mathbf{h}_v(\alpha, \beta)^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + h_r(\alpha, \beta, f_{rr}, \eta) \right] \quad (57)$$

e substituindo na equação 56, obtêm-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{h_p(\alpha, \beta)}{\det \mathbf{M}} (\tau_\natural + \tau_d + f_\natural r_2 - b \cdot r^2 \dot{\theta}) \quad (58)$$

válido se  $h_p(\alpha, \beta)$  e  $\det \mathbf{M} \neq 0$ .

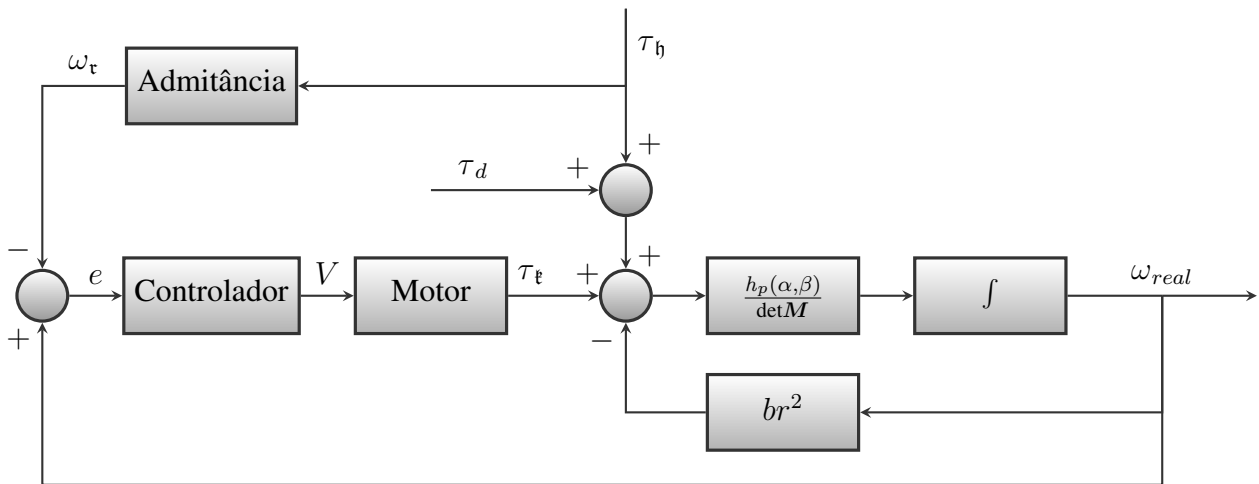
Descrevendo dessa forma, o modelo (58) se torna próximo de um linear se  $h_p(\alpha, \beta)/\det \mathbf{M}$  for aproximadamente constante. Nessa situação, a equação 58 pode ser representada pelo diagrama de blocos em malha fechada da figura 18.

Observando o diagrama de blocos da figura 18, é possível de se perceber que, desprezando o vínculo da força da pessoa com a velocidade angular de referência  $\dot{\theta}_\tau$ , tanto o torque da pessoa ( $\tau_\natural$ ) como o de perturbação ( $\tau_d$ ), são perturbações para a malha fechada do motor.

A equação diferencial 58 pode ser considerada uma *Linear Time Invariant* (LTI) (do inglês, linear e invariante no tempo) se a função  $\frac{h_p}{\det \mathbf{M}}$  tiver pequena variação na faixa  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  e  $\beta \in [-\pi, \pi]$ , região sobrestimada de angulações possíveis dos membros superiores do usuário da cadeira de rodas. Uma forma de se testar essa condição é adotar valores plausíveis para as propriedades fixas e avaliar a função em termos das duas variáveis.

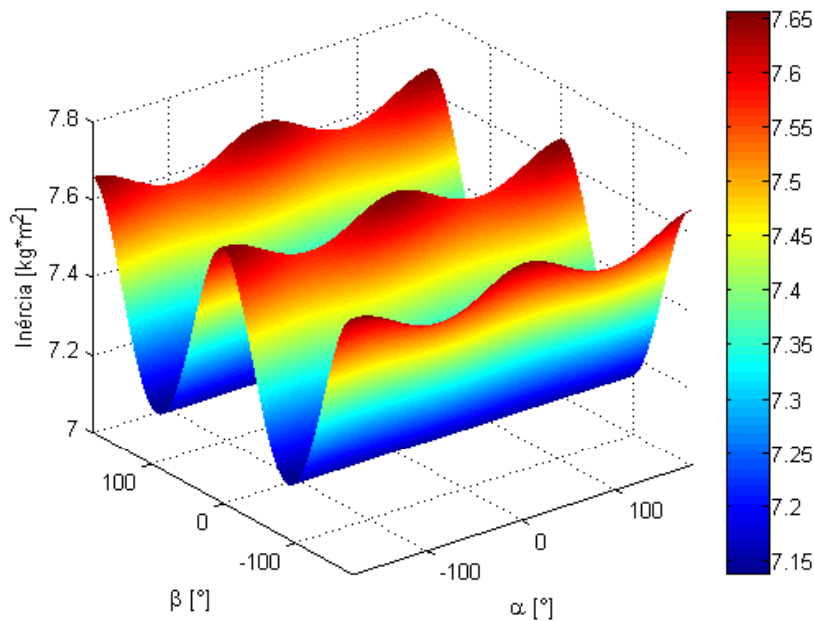
Adotando os valores padronizados presentes em Winter (2009) para uma pessoa com massa de 70 kg e 1,70 m de altura e as faixas desses valores descritas anteriormente, é possível de se obter a figura 19.

Figura 18 – Diagrama de blocos em malha fechada da cadeira de rodas assistida.



Fonte: Autor.

Figura 19 – Variação na Inércia para um conjunto de parâmetros.



Fonte: Autor.

Da figura 19, verifica-se que a variação de “inércia equivalente” descrita pela função  $\frac{h_p}{\det M}$  é bem restrita entre 7,15 a 7,65 kg m<sup>2</sup>. Para esses parâmetros, adotando uma “inércia equivalente” fixa de valor  $j_{eq} = 7,4$  kg m<sup>2</sup>, o máximo erro admitido seria de 3,4%.

O gráfico também demonstra que os maiores valores são obtidos quando  $\alpha = \beta = 0$  (braços e antebraços estendidos na horizontal) e os menores quando  $\alpha = \beta = -90$  graus (braços e antebraços estendidos na vertical). Em um ciclo convencional de tração, geralmente

a mão da pessoa fica próximo ao aro de tração, dificilmente alcançando a região horizontal (de maior valor de inércia) assim, é esperado que a região de variação desse parâmetro seja ainda mais limitada.

A superfície restrita da figura 19 também comprova que não haverá valores próximos de zeros para a função  $h_p(\alpha, \beta)$ , o que garante que o ganho multiplicativo do torque de perturbação da equação 57 não tenda a valores próximos de infinito.

Com tudo isso em vista, se o controlador conseguir reduzir os efeitos do torque de perturbações tidos pela equação 57, o modelo de quatro barras é reduzido ao de uma dinâmica de primeira ordem tal como a equação 53, desconsiderando o escorregamento e considerando  $f_{ext} = f_h + f_t$  (o total da força externa é a força do motor mais a força aplicada pela pessoa).

A hipótese do escorregamento pode não ocorrer na prática devido, por exemplo, a imperfeições de pista. Sendo assim essa hipótese também foi verificada utilizando um modelo de atrito dinâmico, conhecido como LuGre (WIT et al., 1995) somado as respostas de algumas simulações obtidas.

Usualmente, utilizam-se motores de corrente contínua sem escovas *BrushLess Direct Current Motor* (BLDC) para as cadeiras de rodas com assistência, devido a sua falta de necessidade por manutenção contínua além de não haver ruídos ou faíscas durante o funcionamento, coisas que poderiam ocorrer com motores de corrente contínua com escova.

A dinâmica do motor do tipo BLDC será considerada como uma de primeira ordem na forma (CRNOSIJA; BJAZIC; KRISHNAN, 2003):

$$j_t \cdot \frac{d\omega_t}{dt} = k_t \cdot I - \frac{\tau_t}{rt} - r^2 \cdot b_t \quad (59)$$

onde  $k_t$  é a constante de torque do motor,  $j_t$  é a inércia do motor,  $\omega_t$  é a velocidade angular do motor,  $b_t$  é o coeficiente de atrito dinâmico do motor,  $I$  é a corrente elétrica e  $\tau_t$  é a reação do torque aplicado pelo motor na equação 58.

$rt$  é a relação de transmissão entre o motor e a cadeira de rodas, definido como:

$$rt = \frac{\omega_t}{\omega_{real}} \quad (60)$$

sendo  $\omega_{real} = \frac{d\theta}{dt}$  a velocidade angular da cadeira de rodas.

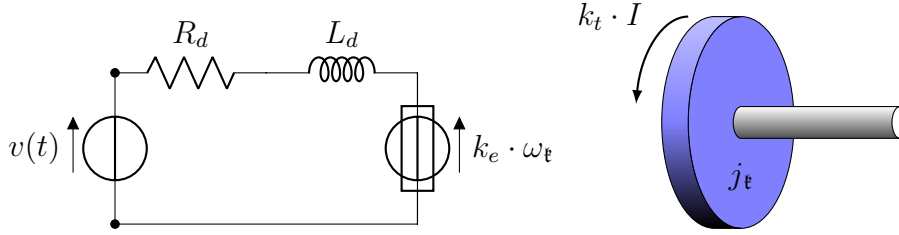
A corrente do motor é obtida através do polo elétrico determinada pela equação diferencial:

$$L_a \cdot \frac{dI}{dt} = V - R_a \cdot I - k_e \cdot \omega_t \quad (61)$$

onde  $L_a$  e  $R_a$  representa a indutância e a resistência equivalente do motor da cadeira de rodas e  $k_e$  é a constante da força contra eletromotriz.  $V$  é a tensão no motor e a saída do controlador, conforme a figura 20.

Aplicando a relação de transmissão  $rt$  sob a equação do motor (59), obtêm-se:

Figura 20 – Modelo do motor elétrico usado no trabalho.



Fonte: Autor.

$$j_t \cdot \frac{d\omega_{real}}{dt} rt = k_t \cdot I - \frac{\tau_t}{rt} - r^2 \cdot b_{real} \cdot rt$$

ou

$$\frac{d\omega_{real}}{dt} = \frac{1}{j_t \cdot rt^2} (k_t \cdot I - \tau_t - r^2 \cdot rt \cdot b_{real}) \quad (62)$$

Igualando as equações 58 e 62, a aceleração da cadeira de rodas pode ser reduzida a:

$$\frac{d\omega_{real}}{dt} = \frac{1}{j_{eq} + rt^2 \cdot j_t} [rt \cdot k_t \cdot I + \tau_d + \tau_h - (b \cdot r^2 + rt^2 \cdot k_e + r^2 \cdot b_t) \cdot \omega_{real}] \quad (63)$$

onde:  $j_{eq} = \frac{\det M}{h_p(\alpha, \beta)}$ .

Organizando a equação 63 com a do polo elétrico definida em 59, pode-se criar um sistema em espaços de estados na forma:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{1}{L_a} (V - R_a \cdot I - k_e \cdot rt \cdot \omega_{real}) \\ \frac{d\omega_{real}}{dt} = \frac{1}{j_t} (rt \cdot k_t \cdot I + \tau_d + \tau_h - b_t \cdot \omega_{real}) \end{cases} \quad (64)$$

onde  $I$  e  $\omega_{real}$  são os estados do sistema,  $j_t = j_{eq} + rt^2 \cdot j_t$  e  $b_t = b \cdot r^2 + rt^2 \cdot k_e + r^2 \cdot b_t$ .

Em bicicletas elétricas, sistema mais difundido e similar no ponto de vista de construção em comparação com cadeiras de rodas assistidas, é usual a utilização de motores *direct drive* onde o motor é montado diretamente no cubo da roda, não havendo relações de transmissões entre motor e roda. Esse sistema é mais barato de se fabricar porém, exige motores maiores e mais pesados.

Passando para o domínio da frequência o sistema de espaço de estados 64 e agrupando em uma única equação, obtém-se:

$$\frac{(j_t s + b_t)(sL_a + R_a) + rt^2 k_e \cdot k_t}{sL_a + R_a} \omega_{real} = V \frac{rt k_t}{sL_a + R_a} + \tau_d + \tau_h \quad (65)$$

Definindo a função de transferência do controlador como:

$$G = \frac{V}{\omega_t - \omega_{real}}$$

onde  $G$  é a função de transferência entre o erro da malha de admitância e a diferença de potencial do motor elétrico e  $\omega_r$  é a velocidade angular de referência.

Aplicando na equação 65, considerando motor *direct drive* ( $rt = 1$ ) obtêm-se:

$$\left[ \frac{(j_t s + b)(L_a s + R_a) + k_t \cdot k_e + G \cdot k_t}{L_a s + R_a} \right] \omega_{real} = \tau_d + \tau_h + \left[ \frac{k_t \cdot G}{L_a s + R_a} \right] \omega_r \quad (66)$$

Deseja-se que a velocidade angular real do sistema seja bem próximo da referência para a região de frequências onde a saída da admitância possui maior energia. Como a mesma será admitida como uma dinâmica simples de primeira ordem com baixa constante de tempo, esta energia é predominantemente forte em baixas frequências.

Escrevendo a velocidade angular real da cadeira em função da referência, é obtêm-se a seguinte a função de transferência:

$$\frac{\omega_{real}}{\omega_r} = \frac{k_t \cdot G}{j_t L_a s^2 + (j_t R_a + b_t L_a) s + (k_e \cdot k_t + G \cdot k_t + b_t R_a)} \quad (67)$$

Para a condição de acompanhamento de sinal ser satisfeita, é necessário que o lado direito da equação 67 tenha módulo próximo de 1 para baixas frequências. Uma maneira aproximada de se concretizar isso é fazer:

$$G = K \frac{j_t L_a s^2 + (j_t R_a + b_t L_a) s + (k_e \cdot k_t + b_t R_a)}{k_t s} \quad (68)$$

para  $K \rightarrow \infty$ .

Substituindo o controlador (68) na equação 67, resulta em:

$$\frac{\omega}{\omega_r} = \frac{K}{s + K} = \frac{1}{1/K s + 1} \Big|_{K \rightarrow \infty} \approx 1 \quad (69)$$

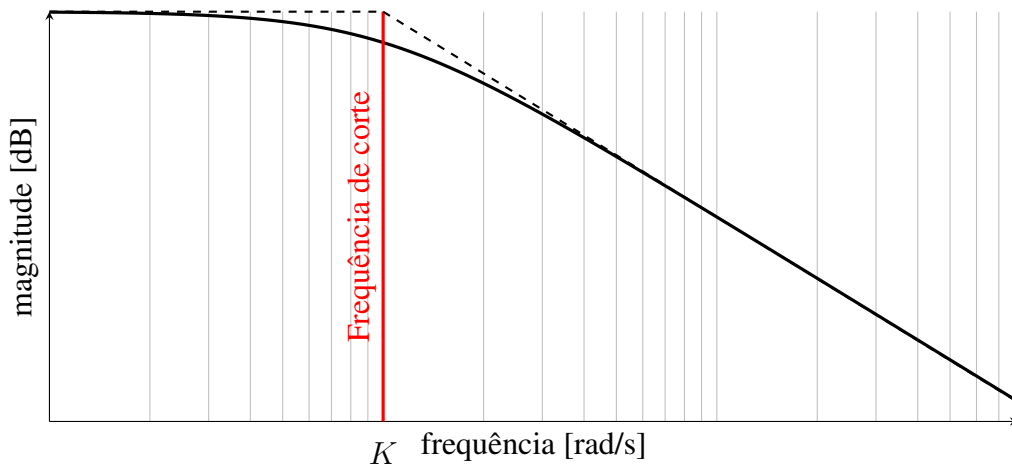
onde  $K$  é um parâmetro fixo de projeto. Em situações reais, esse valor deve ser grande o suficiente de forma que mantenha o módulo próximo a unidade para a faixa de frequências necessárias, sem sobre-saturar o sistema real.

A resposta obtida na equação 69 é um sistema de primeira ordem com ganho unitário até aproximadamente a frequência de corte  $K$ , onde decai a 20 decibéis por década.

Como os parâmetros do controlador neste caso dependem dos parâmetros do sistema que não são exatamente conhecidos, é necessário fazer uma análise de estabilidade com os possíveis pares de valores que o sistema real podem admitir. Tal análise, infelizmente, não pode ser feita usando meios clássicos de controle visto o fato do sistema ser naturalmente não linear com alguns termos (como a inércia equivalente  $j_{eq}$ ) com pequenas variações no tempo.

Essas análises de parâmetros serão avaliadas por simulações de controle ótimo em função da antropometria do usuário e velocidade mantendo os parâmetros do controlador são fixos. Desta forma, será possível analisar se o controlador obtido anteriormente possui alguma robustez à variação dos parâmetros.

Figura 21 – Resposta em frequência esperada do sistema dinâmico



Fonte: Autor.

#### 4.3.2 Modelo de referência

Para o modelo de referência (admitância) será utilizado um modelo de primeira ordem, similar ao da equação 53:

$$m_{\tau} \cdot \dot{v}_{\tau} = f_{\eta} - b_{\tau} \cdot v_{\tau} \quad (70)$$

Essa escolha foi feita pois os parâmetros possuem significado físico em tal modelo, permitindo analisar melhor o efeito da variação dos mesmos nas simulações de controle ótimo deste trabalho. Uma outra justificativa para isso é a possibilidade de se ter uma base de comparação com outros tipos de assistências vistos na literatura que utilizam o sistema linear de primeira ordem como base.

Assim, o erro do sistema dinâmico pode ser definido como:

$$e = \frac{v_{\tau}}{r} - \omega$$

Com:  $\omega = \dot{\theta}$ , tal como definido anteriormente.

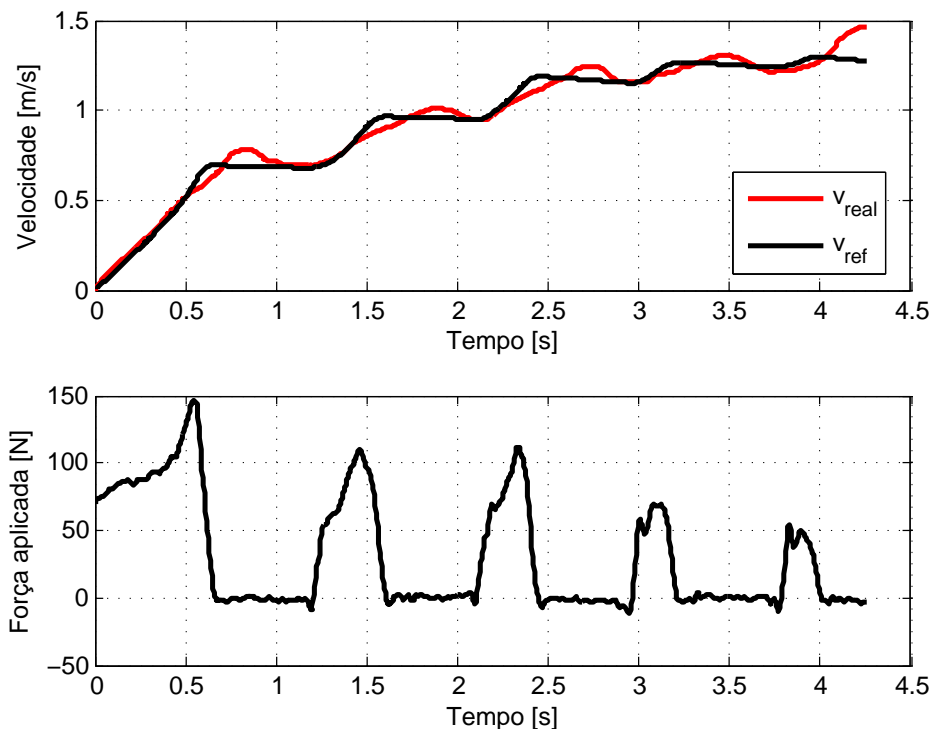
O controlador escolhido irá privilegiar as baixas frequências com uma natureza parecida da admitância visto que ambas respostas são formadas por modelos de primeira ordem, por isso, é necessário ter cautela na escolha tanto dos parâmetros  $K$  do controlador como a massa e coeficiente de atrito dinâmico de referência da admitância haja visto que uma parte importante da energia será usada para impor artificialmente essa dinâmica.

Se o controlador for robusto o suficiente, a cadeira de rodas reagirá à força da pessoa conforme a equação 70 ao invés de seu sistema real. Os dois sistemas são bastante diferentes entre si, principalmente devido aos efeitos da movimentação dos membros superiores da pessoa

que geram um aumento de velocidade mesmo quando não há aplicação direta de força sob a cadeira de rodas.

Isso pode ser observado no gráfico 22, onde estão presentes dados mensurados em uma cadeira de rodas em locomoção longitudinal obtidos no trabalho de Amâncio (2016) junto de um modelo estimado de primeira ordem.

Figura 22 – Dados da velocidade mensurada e simulada em função da força aplicada pela pessoa em velocidade confortável.



Fonte: Autor.

Para comparar as peculiaridades do modelo de referência de primeira ordem em relação a dinâmica real da cadeira de rodas, pode-se utilizar parâmetros da equação 70 que mais se aproximam da resposta dinâmica real governada nas simulações pelo sistema de quatro barras, descrito na seção 4.2 e desenvolvido no apêndice A.

Um modelo imediato que pode ser aplicado como referência para essa comparação de efeitos é o simplificado obtido da equação 58 onde a dinâmica do motor não interfere na resposta e o único resultado efetivo do controlador é reduzir as não linearidades do modelo original da cadeira de rodas.

Como a influência do torque de perturbação  $\tau_d$  é incerto, pode ser que o modelo simplificado da equação 58 não represente perfeitamente o sistema, para isso, há métodos numéricos de identificação para se obter um modelo de primeira ordem que se aproxima melhor da resposta real para algumas manobras que o sistema nominal simplificado.

### 4.3.2.1 Métodos de identificação

Uma maneira usual de se obter tal modelo com base em um experimento ou, neste caso, uma simulação é através do método de **mínimos quadrados**.

Para uso desse método, a equação dinâmica 53 é discretizada para um formato do tipo Modelo Autoregressivo com entrada exógena (ARX) (do inglês, *Autoregressive exogenous model*) (AGUIRRE, 2007) aproximando a derivada da velocidade por:

$$\frac{dv_{real}}{dt} \approx \frac{v_{real}(k) - v_{real}(k-1)}{Td}$$

com  $Td$  sendo o inverso da frequência de amostragem, que deve ser fixa para todos os pontos utilizados.  $k$  indica o índice do tempo da medição.

Assim o modelo (53) pode ser representado em forma recursiva como (AGUIRRE, 2007):

$$v_{real}(k) = \frac{Td}{m} \cdot [f_{ext}(k-1) - b \cdot v_{real}(k-1)] + v_{real}(k-1) \quad (71)$$

Essa aproximação não gera grandes erros se a frequência de amostragem for elevada. Reescrevendo o modelo na forma ARX:

$$v_{real}(k) = \varpi_1 \cdot v_{real}(k-1) + \varpi_2 \cdot f_{ext}(k-1) \quad (72)$$

sendo:

$$\varpi_1 = \frac{Td \cdot b}{m} + 1, \quad \varpi_2 = \frac{Td}{m}$$

os parâmetros que serão estimados.

Para a estimação dos parâmetros, geralmente escreve-se o modelo ARX em formato matricial. Fazendo esse processo, obtém-se:

$$\mathbf{v}_{2:f} = [\mathbf{v}_{1:f-1}, \mathbf{f}_{t_{1:f-1}}] \cdot \begin{bmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{bmatrix} + \mathbf{e} \quad (73)$$

$$\mathbf{v}_{2:f} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varpi} + \mathbf{e} \quad (74)$$

o índice  $f$  representa os últimos pontos mensurados no tempo.

O termo  $\mathbf{e}$  presente na equação 74 representa o erro proporcionado pelos ruídos e incertezas do modelo apresentado.  $\mathbf{v}$  são as velocidades medidas a cada ponto no experimento e  $\mathbf{f}_t$  é o vetor de forças tangenciais aplicadas na cadeira de rodas. Deseja-se minimizar ao máximo o termo  $\mathbf{e}$ , para isso, cria-se uma função objetivo na forma:

$$J = \mathbf{e}^2 = (\mathbf{v}_{2:f} - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varpi})^T \cdot (\mathbf{v}_{2:f} - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varpi}) \quad (75)$$

Fazendo a derivada em termos da matriz de parâmetros  $\boldsymbol{\varpi}$ , tem-se:



$$\frac{\delta J}{\delta \varpi} = -\mathbf{V}^T \cdot (\mathbf{v}_{2:f} - \mathbf{V} \cdot \varpi) - (\mathbf{v}_{2:f} - \mathbf{V} \cdot \varpi)^T \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (76)$$

ou

$$\frac{\delta J}{\delta \varpi} = -2\mathbf{V}^T \cdot (\mathbf{v}_{2:f} - \mathbf{V} \cdot \varpi) = 0 \quad (77)$$

Sendo assim,  $\varpi$  pode ser obtido por:

$$\varpi = (\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{v}_{2:f} \quad (78)$$

válido para a situação onde  $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V}$  é inversível.

O método descrito anteriormente de identificação é eficiente quando não há correlação dos erros. Entretanto, quando existe correlação, a resposta pode ser desviada da real causando um tipo de erro conhecido por *bias* (AGUIRRE, 2007). Para uma simulação, não há ruídos nos sinais obtidos, diminuindo a chance de ter esse tipo de erro tornando esse método um possível candidato para se obter o modelo de primeira ordem que mais representa o real.

Outro método para a estimativa dos parâmetros é o das **Variáveis Instrumentais (IV)** (do inglês, *Instrumental Variables*) (AGUIRRE, 2007) que é um método bem comum para a estimativa de parâmetros em sistemas dinâmicos pois evita possíveis correlações entre o erro do sistema e o sinal de entrada, evitando assim possíveis erros de desvio como no método anterior.

Existem várias maneiras de se aplicar o método IV para a estimativa de sistemas dinâmicos, uma delas é a aplicada pela função *tfest* no *toolbox* de identificação do MATLAB<sup>®</sup>. Nesta função, é aplicado um pré-filtro no sinal que tenta descorrelacionar o erro com a saída, evitando desvios na convergência (YOUNG; JAKEMAN, 1980).

Tal método é mais robusto a erros sendo provavelmente o mais apropriado para a estimativa de um modelo de primeira ordem bem próximo ao da cadeira de rodas manual mensurado. O único problema seria o caso do pré-filtro filtrar características do modelo não linear original resultando em um modelo de primeira ordem preciso para os dados utilizados, mas impreciso para descrever a dinâmica em outros casos.

Esses dois métodos de identificação, somados com a **simplificação desenvolvida na equação 58** representam três maneiras diferentes de se obter o modelo de primeira ordem que mais se aproximam do real. Essas três maneiras descritas serão utilizadas para a estimativa dos parâmetros do modelo simplificado, isso trará uma base de comparação mais ampla, haja visto que cada um tem suas particularidades.

#### 4.3.2.2 Avaliação dos métodos de identificação

Uma maneira numérica de se avaliar a eficiência dos métodos utilizados na estimativa dos parâmetros é através de uma função custo. Para esse trabalho será adotada a Função Custo

da Raiz Quadrada do Erro Médio Normalizado (NRMSE) (do inglês, *Normalized Root Mean Square Error*) que é comumente utilizado em identificação de sistemas e pode ser obtida como:

$$R = 100 \cdot \left( 1 - \frac{\|\mathbf{v}_{mod} - \mathbf{v}_{ref}\|}{\|\mathbf{v}_{mod} - \bar{\mathbf{v}}_{ref}\|} \right) \quad (79)$$

onde  $R$  é o coeficiente de correlação do modelo em relação ao sinal medido,  $\mathbf{v}_{mod}$  é o sinal de referência integrado a partir da integração do modelo,  $\mathbf{v}_{ref}$  é o vetor de velocidade mensurado e  $\bar{\mathbf{v}}_{ref}$  é a média do sinal da velocidade mensurada.

### 4.3.3 Planejamento das simulações

O modelo de referência pode ter qualquer par de massa e coeficiente de atrito dinâmico, podendo este ajudar o usuário da cadeira de rodas ou dificultar.

No tópico anterior foi discutido o uso de um modelo similar a de uma cadeira de rodas manual sem os efeitos da não linearidade, uma vez que estas não podem ser colocadas junto ao modelo de referência devido a impossibilidade de medir  $\alpha$  e  $\beta$ . Esse modelo aproximado pode não ser o ideal se a dinâmica relativa dos membros superiores da pessoa ajudar no movimento da cadeira de rodas, principalmente na fase de retorno, onde não há a aplicação de força direta no sistema e o uso de um modelo de primeira ordem implicaria em rejeitar a influência de tal dinâmica. Nessas condições, a escolha de um outro par de coeficientes pode ser mais efetivo na diminuição dos esforços da pessoa ao custo de um gasto maior no motor.

Para estudar melhor os efeitos dos parâmetros do modelo de referência, foi feito um planejamento de experimentos onde um conjunto de valores de possíveis candidatos de massa e coeficiente de atrito dinâmicos virtuais (ou de referência) foi definido. Cada um desses pares de pontos foram simulados sob restrições similares de controle ótimo entre si.

Além disso, como o controlador foi projetado tendo parâmetros do modelo de quatro barras como base, é interessante avaliar se o controlador possui alguma robustez em função da variação de parâmetros do modelo de quatro barras. Para isso, foi feito outro planejamento de experimentos com um conjunto de parâmetros antropométricos diferentes entre si, que representaria o uso da cadeira de rodas projetada por diferentes pessoas.

O método direto de otimização tenta descrever uma dinâmica contínua no tempo por um conjunto de parâmetros com vínculos dinâmicos entre si. Esse método não é perfeito e algumas falhas dinâmicas podem ocorrer, levando a resultados incoerentes com a realidade. Nesses casos, o uso de um maior número de pontos de colocação tal como uma nova estimativa inicial geralmente resolvem o problema mas, com o número de simulações feitas nesse trabalho, avaliar um por um cada estado tomaria muito tempo.

Sendo assim, neste trabalho foi utilizada a métrica de cálculo do erro máximo de malha, que está melhor descrito no apêndice B.1. Todas as simulações foram admitidas como tendo um erro máximo de  $\varepsilon \leq 1,5\%$  salvo em algumas simulações onde o refino de malha e troca

por melhores estimativas não foram suficientes, tais situações serão descritas quando ocorrerem pelo texto.

#### 4.4 FORMULAÇÃO DE CONTROLE ÓTIMO

A cadeira de rodas por controle de impedância é um projeto ainda em processo de desenvolvimento pelo grupo de pesquisa, sendo assim impossível, no período de publicação deste trabalho, aplicar diretamente o controle de impedância desenvolvido na seção 4.3 e obter sua eficiência por experimentos.

Sendo assim, a forma encontrada para avaliar o sistema de controle desenvolvido, tal como dar uma ideia de parâmetros ideais para o projeto foi através de simulações de controle ótimo que tentariam descrever situações usuais no dia a dia de um cadeirante verificando sua eficiência, tanto para manter o erro da malha de velocidade pequeno, quanto para a redução dos torques articulares aplicados pela pessoa em relação a cadeira de rodas convencional. É importante assim que as situações escolhidas para as simulações sejam coerentes com eventos normais da vida de um cadeirante.

Levando isso em consideração, foram escolhidas duas situações distintas para a comparação da cadeira de rodas com e sem assistência, consideradas aqui como “corrida energética” e “regime permanente”. A situação de “corrida energética” visa verificar como a cadeira de rodas atuaria quando encontrada com uma situação onde o cadeirante necessita trafegar de uma posição para outra em determinado tempo fixo, enquanto a situação de “regime permanente” verificaria como seria a atuação do cadeirante quando este já está em movimento e deseja manter-se com velocidade constante.

Para as condições de “regime permanente” serem satisfeitas, basta vincular os estados iniciais do problema aos finais de modo que o sistema, quando exposto aos torques obtidos, reaja de maneira cíclica:

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{x}_f$$

Na simulação da cadeira de rodas convencional (sem controlador) isso equivale a:

$$\begin{cases} \alpha_o = \alpha_f \\ \beta_o = \beta_f \\ \dot{\alpha}_o = \dot{\alpha}_f \\ \dot{\beta}_o = \dot{\beta}_f \\ \dot{\theta}_o = \dot{\theta}_f \end{cases} \quad (80)$$

Outro vínculo utilizado é a velocidade média do deslocamento:

$$\bar{v} = \frac{r(\theta_f - \theta_o)}{t_f} \quad (81)$$

onde  $\bar{v}$  é um valor definido *a priori*.

A função objetivo foi definida como (ACKERMANN et al., 2014):

$$\min_u \mathcal{J} = \int_0^{t_f} (\tau_1^2 + \tau_2^2) dt \quad (82)$$

onde  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são os torques aplicados pelo ombro e cotovelo da pessoa respectivamente. Tal função objetivo só penaliza o esforço da pessoa, que são os torques de entrada no sistema dinâmico, tanto com assistência quanto sem.

Deseja-se com essas restrições e função objetivo obter os torques articulares ótimos para manter a velocidade da cadeira de rodas em um valor médio  $\bar{v}$  dado. Essa resposta não é tão óbvia como seria para o bloco de massa concentrada pois a força de propulsão só é aplicada em parte do movimento cíclico que a pessoa usa para propulsionar a cadeira de rodas.

Para as condições de contorno das simulações de “corrida energética”, foi fixado o tempo final e o deslocamento da cadeira de rodas com base em uma velocidade média, ou seja:

$$t_f = \frac{\Delta y}{\bar{v}} \quad (83)$$

onde:

$$\Delta y = r(\theta_f - \theta_o)$$

e  $\bar{v}$  são valores fixos definidos *a priori*. Note-se que a cadeira de rodas parte do repouso ( $v(0) = 0$ ) e a função objetivo é a mesma do caso anterior.

Estudou-se o uso de uma manobra similar à utilizada na seção 4.1, onde a cadeira deveria atingir o deslocamento final em repouso porém, na fase de propulsão (onde a pessoa aplica força sobre a cadeira de rodas no modelo de quatro barras) há um vínculo direto cinemático entre os membros superiores da pessoa e o aro de propulsão (equação 49) que, na utilização usual, não existiria no movimento de frenagem pois o cadeirante aplicaria atrito gradativamente no aro de propulsão até a completa parada da cadeira de rodas. Essa diferença física na natureza do movimento de frenagem poderia comprometer as simulações e por isso foi descartada a simulação.

Ambas as condições de simulação anteriores (regime permanente e corrida energética) possuem as mesmas restrições dinâmicas  $\Omega$ , podendo estas serem simuladas em malha aberta (cadeira de rodas convencional) ou em malha fechada (com o controlador definido na seção 4.3).

#### 4.4.1 Condições dinâmicas de malha aberta

Retomando o modelo de quatro barras expandido (121) (reescrito aqui por conveniência):

$$M\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_m \end{bmatrix} \quad (84)$$

Admitindo o vetor de estados do controle ótimo como sendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (85)$$

E o vetor de controles do controle ótimo como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} \quad (86)$$

As equações dinâmicas estarão no formato especificado pela quadratura (7) se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{1:3} = \mathbf{x}_{4:6} \\ \dot{\mathbf{x}}_{4:6} = M^{-1} \left( \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{u}_{1:2} + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{u}_{3:4} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \right) \end{cases} \quad (87)$$

A formulação da equação 87 necessita da inversão de uma matriz de três linhas e três colunas para cada ponto de colocação. Essa formulação pode acarretar em erros na diferenciação numérica ou aumentar muito o tempo de simulação quando outros meios, como a diferenciação automática, é utilizada.

Uma maneira de se evitar tais problemas é multiplicar a matriz de massa  $M$  pelos dois lados da equação e trabalhar com a forma implícita:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{1:3} = \mathbf{x}_{4:6} \\ M \cdot \dot{\mathbf{x}}_{4:6} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{u}_{1:2} + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{u}_{3:4} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (88)$$

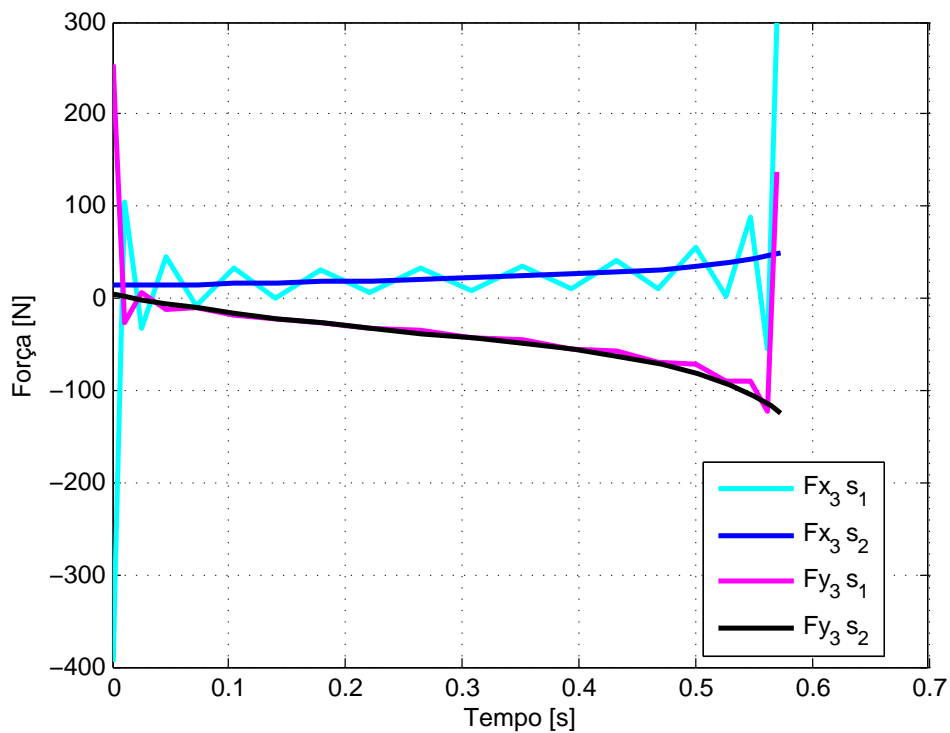
essa formulação pode ser usada, já que a aproximação da derivada dos estados é obtida simplesmente por uma multiplicação matricial ( $\mathcal{D} \cdot \mathbf{x} \approx \dot{\mathbf{x}}$ ), tal como desenvolvido no apêndice B.

A representação das restrições na forma (88) permite uma convergência melhor em relação a representação da equação 87, visto que só é necessário resolver uma multiplicação matricial ao invés de uma inversão.

Na fase de propulsão, a cinemática do sistema é fechada pelos vínculos cinemáticos da mão com o aro de propulsão que fazem aparecer as forças de contato  $[f_{x3}, f_{y3}]$ . Tais forças em conjunto com as duas restrições cinemáticas do problema (49) são consequências geradas pela representação do sistema em três variáveis dinâmicas ao invés de uma.

Resolvendo o problema de controle ótimo com esse conjunto de restrições, ocorreram problemas nas forças de contato, que variavam muito rapidamente dando uma resposta similar a um sinal corrompido por um ruído na frequência dos pontos colocados. Isso pode ser observado na figura 23, onde foi simulado o modelo de quatro barras conforme restrições descritas anteriormente.

Figura 23 – Comparação entre as forças de contato simuladas.



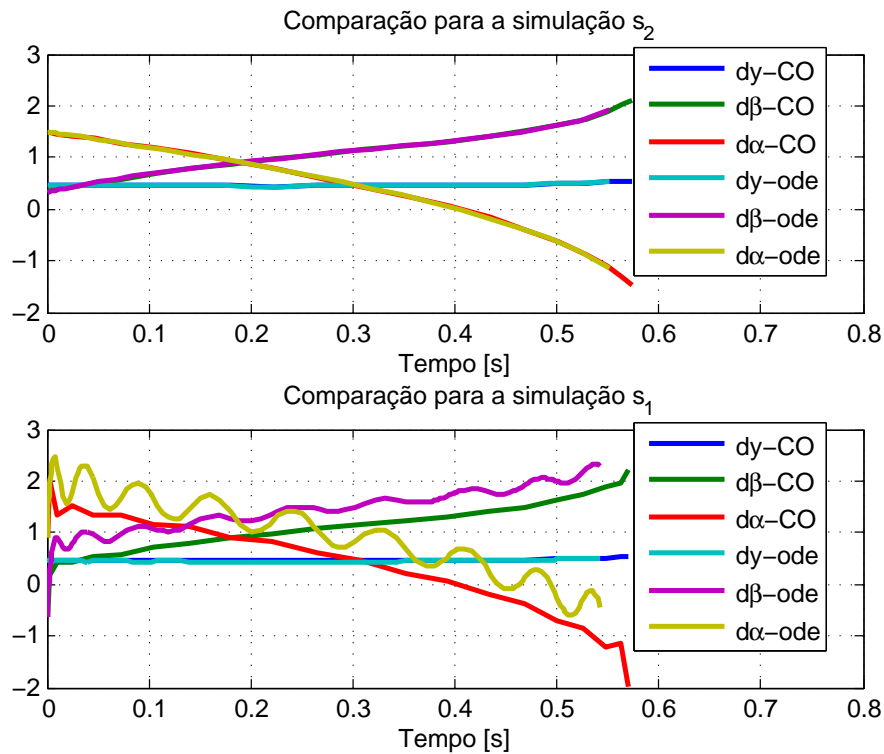
Fonte: Autor

Observe que o valor das forças de contato simuladas usando as restrições 49 e a dinâmica em três estados (simulação  $s_1$ ) são bem ruidosas e variam em torno da resposta ideal obtida por meios que serão explicados posteriormente (simulação  $s_2$ ). Isso compromete a integridade da resposta pois há a presença de erros excessivos entre os pontos colocados, comprometendo principalmente se os resultados da força de contato devem ser usados como é o caso da simulação com controlador.

Uma consequência dos ruídos pode ser observada na figura 24, onde o índice “CO” representa as velocidades obtidos no controle ótimo e o índice “ode” representa as velocidades

calculadas utilizando os estados e controles obtidos por controle ótimo nas duas simulações  $s_1$  e  $s_2$ .

Figura 24 – Integração das acelerações calculadas usando os parâmetros obtidos por controle ótimo.



Fonte: Autor

Perceba que as respostas integradas a partir dos estados da simulação  $s_1$  são bem ruidosas e variam, com alguma defasagem, ao redor das respostas dos estados obtidas por controle ótimo. Apenas a velocidade da cadeira de rodas, definida por  $dy$ , que não foi muito afetada, ficando bem próxima dos estados obtidos. Em comparação, as velocidades integradas a partir dos estados da simulação  $s_2$  seguem bem as velocidades obtidas diretamente pelo controle ótimo.

Sendo assim, para evitar esses tipos de ruídos, o ideal do sistema de quatro barras é ser simulado em sua forma mínima: com três graus de liberdade na fase de retorno e apenas um na fase de propulsão, sendo esse a variação angular longitudinal das rodas traseiras da cadeira de rodas. Isso é de difícil resolução pois envolveria resolver as restrições cinemáticas da equação 49 apenas para  $\theta$ , o que resultaria em uma longa equação envolvendo fórmulas complicadas que poderia dificultar bastante a convergência.

Assim, como um artifício, foram considerados  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  como estados na fase de propulsão, mantendo  $\alpha$  e  $\beta$  como variáveis do problema de controle ótimo, vinculadas a  $\theta$  através do uso

das restrições (49). Desta forma a jacobiana pode manter-se dependente de  $\alpha$  e  $\beta$  que continuam sendo variáveis do problema enquanto a dinâmica é resolvida em sua forma mínima.

Derivando as restrições (49) em relação ao tempo, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} -p_A \sin \alpha & -p_B \sin \beta & r_2 \sin \theta \\ p_A \cos \alpha & p_B \cos \beta & -r_2 \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (89)$$

perceba que o lado esquerdo da equação 89 equivale a condição da equação 52.

Segregando a parte referente a  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$  das restrições em velocidade da equação 89, resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -p_A \sin \alpha & -p_B \sin \beta \\ p_A \cos \alpha & p_B \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_2 \sin \theta \\ -r_2 \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (90)$$

Que simplificando:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{r_2 \sin(\beta-\theta)}{p_A \sin(\alpha-\beta)} \\ \frac{r_2 \sin(\alpha-\theta)}{p_B \sin(\alpha-\beta)} \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta} \quad (91)$$

A equação matricial 91 retorna a velocidade angular do antebraço  $\dot{\alpha}$  e do braço  $\dot{\beta}$  em função da velocidade angular das rodas traseiras da cadeira de rodas ( $\dot{\theta}$ ).

A matriz jacobiana que reduz a fase de propulsão a forma mínima é definida como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha}{d\theta} \\ \frac{d\beta}{d\theta} \\ \frac{d\theta}{d\theta} \end{bmatrix}$$

Onde, substituindo os valores de (91), resulta em:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha}{d\theta} \\ \frac{d\beta}{d\theta} \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{r_2 \sin(\beta-\theta)}{A \sin(\alpha-\beta)} \\ \frac{r_2 \sin(\alpha-\theta)}{B \sin(\alpha-\beta)} \\ -1 \end{bmatrix}$$

A aceleração do vetor de variáveis generalizadas  $\mathbf{q}$  na fase de propulsão pode ser obtida simplesmente derivando  $\mathbf{J} \cdot \dot{\theta}$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{J} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (92)$$

Multiplicando a equação matricial 84 pela esquerda pelo transposto da matriz jacobiana e substituindo o vetor de acelerações  $\ddot{\mathbf{q}}$  pela equação 92, resulta em:

$$\mathbf{J}^T \cdot [\mathbf{M}\dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\theta} + \mathbf{M}\mathbf{J} \cdot \ddot{\theta}] = \mathbf{J}^T \left[ \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_m \end{bmatrix} \right] \quad (93)$$



Pois:

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = 0$$

A vantagem da utilização da equação 93 em relação a 84 é que esta é escrita em apenas um estado ao invés de três, sem necessitar da eliminação de  $\alpha$  e  $\beta$  do problema de controle ótimo.

A força tangencial aplicada pela pessoa pode ser obtida calculando a aceleração por (93):

$$\ddot{\theta} = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{M}\mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \left[ \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_m \end{bmatrix} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\theta} \right] \quad (94)$$

A resolução de 94 envolve apenas uma divisão escalar pois  $\mathbf{J}^T \mathbf{M}\mathbf{J}$  tem uma dimensão. Com  $\ddot{\theta}$  definido,  $\ddot{\alpha}$  e  $\ddot{\beta}$  podem ser obtidos utilizando a equação 92.

Com as três acelerações, é possível de se resolver o último termo do sistema matricial 121 para  $\tau_h = \mathbf{k}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix}$ , ou seja resolver:

$$\tau_h = \mathbf{k}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \mathbf{m}_{3,:} \cdot \ddot{\mathbf{q}} \left[ \mathbf{k}_{1(3,:)} \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_{3(3,:)} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \tau_t \right] \quad (95)$$

A continuidade entre a fase de propulsão de um grau de liberdade e a de retorno com três pode ser feita aplicando as condições de vínculos de posição (49) e velocidade (91) para o primeiro e último ponto discreto da fase de retorno, além da continuidade da velocidade angular ( $\dot{\theta}$ ) e ângulo ( $\theta$ ) das rodas traseiras da cadeira de rodas.

#### 4.4.2 Condições dinâmicas de malha fechada

A dinâmica da cadeira de rodas em malha fechada é desenvolvida de forma similar ao da sub-seção anterior, tendo só o acréscimo da dinâmica do modelo de referência e do controlador.

Rescrevendo a fórmula do controlador (equação 68) desenvolvida no capítulo 4.3:

$$G = K \frac{j_t L_a s^2 + (j_t R_a + b_t L_a) s + (k_e \cdot k_t + b_t R_a)}{k_t s}$$

Esta também pode ser desenvolvida como:

$$G = \frac{K}{k_t} j_t \cdot L_a \cdot s + \frac{K}{k_t} (j_t R_a + b_t L_a) + \frac{K(k_e \cdot k_t + b_t R_a)}{k_t s} = \mathbf{k}_d \cdot s + \mathbf{k}_p + \frac{\mathbf{k}_i}{s} \quad (96)$$

Com  $\mathbf{k}_d$ ,  $\mathbf{k}_p$  e  $\mathbf{k}_i$  definidos como as constantes de diferenciação, proporcional e integral do controlador.

A ação derivativa, por natureza, tem uma tendência a amplificação de ruídos, além da sua realização direta ser impossível na prática. Sendo assim, a parte de diferenciação do controlador foi desenvolvida adicionando uma dinâmica de primeira ordem com uma constante de tempo  $T_d$  suficientemente pequena no problema, de forma a esta agir como um filtro.

Representando essa ação derivativa no espaço de estados em conjunto com as restrições dinâmicas desenvolvidas anteriormente, resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_i \cdot e \\ \frac{1}{T_d} (e - x_4) \end{bmatrix} \quad (97)$$

Onde a lei de controle associada pode ser escrita como:

$$V = u = \mathbf{k}_p \cdot e + x_3 + \mathbf{k}_d \cdot \frac{1}{T_d} (e - x_4) \quad (98)$$

Essa formulação de PID é similar a apresentada em Canonico (2014).

A dinâmica do modelo de referência junto com o polo elétrico do motor formam mais dois estados extras ao sistema dinâmico final:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mathbf{J}^T \left[ \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_m \end{bmatrix} \right] \\ \mathbf{k}_i \cdot e \\ \frac{1}{T_d} (e - x_4) \\ \frac{1}{m_r} \left( \frac{\tau_t}{r} - x_5 \right) \\ \frac{1}{L_a} \left( V - R_a \cdot x_6 k_e \cdot \dot{\theta} \right) \end{bmatrix} \quad (99)$$

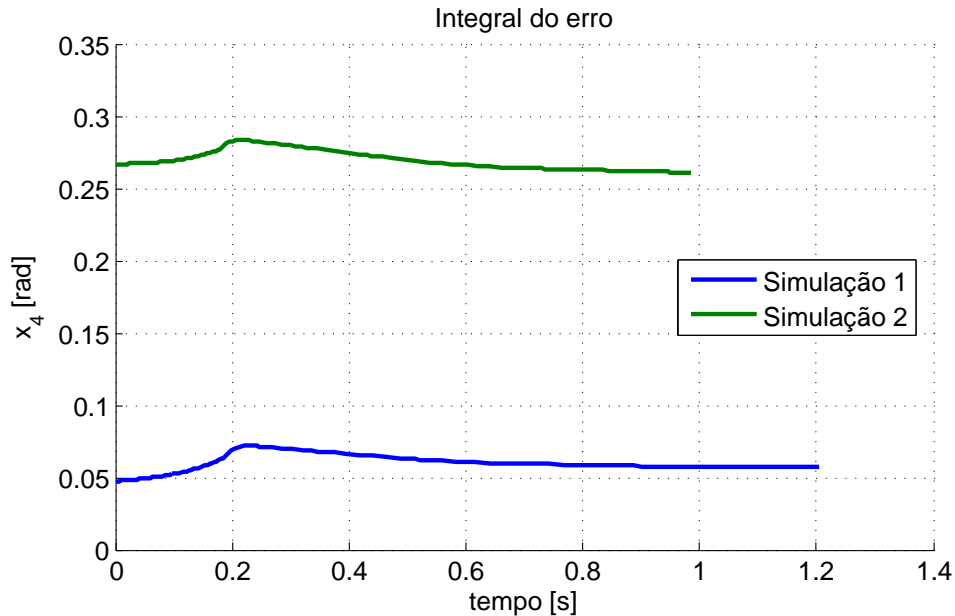
Relembrando que nas simulações em regime permanente é necessário que, além da dinâmica da cadeia de rodas, os estados da equação 99 respeitem a condição:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_f$$

O estado da integral do erro  $x_3$  possui valor inicial dependente ao regime transiente do erro que ocorre anteriormente ao regime permanente. Esse valor inicial é provavelmente diferente de zero e desconhecido *a priori*, o que tornaria uma variável livre do controle ótimo.

Essa variável livre pode, a primeira instância, admitir qualquer valor contanto que possa fazer o estado inicial ser igual ao final, inclusive admitindo valores bem elevados que podem ser impossíveis de serem alcançados, tal como os vistos na figura 25, onde a simulação 1 representa uma simulação de regime permanente com um ciclo transiente que começa em velocidade nula, e a simulação 2 uma simulação feita diretamente sobre a condição de regime permanente. Ambas as simulações foram feitas sobre as mesmas condições de contorno.

Figura 25 – Comparação entre os estados do erro



Fonte: Autor.

Para contornar isso, pode-se inserir um ciclo de transição inicial onde a cadeira de rodas parta do repouso (simulação 1). Nesta situação todos os estados iniciais da equação 99 são nulos pois não há forças anteriormente aplicadas no sistema.

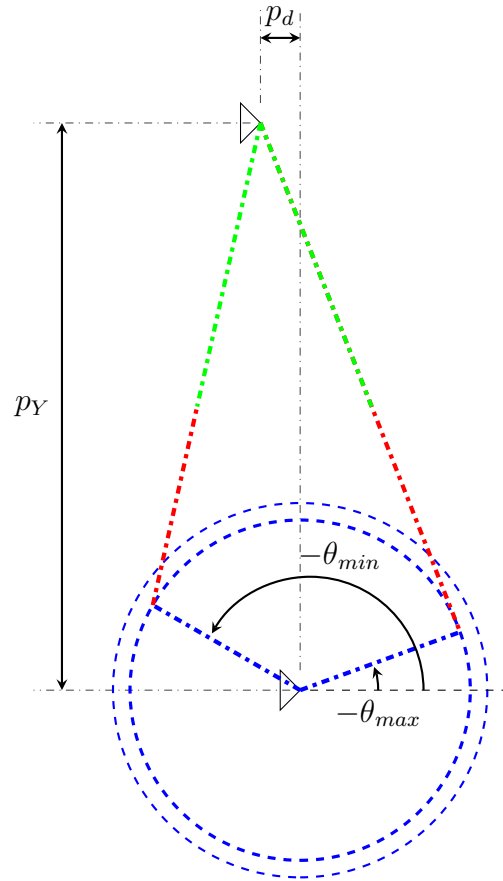
Assim, a simulação de regime permanente teria, no mínimo, 4 fases diferentes: propulsão em transiente, retorno em transiente, propulsão em regime permanente e retorno em regime permanente onde uma condição similar a da equação 80 só será válida para as duas últimas fases, ou seja:

$$v_{med} = \frac{r \left( \theta_f^{(4)} - \theta_o^{(3)} \right)}{t_f^{(4)} - t_o^{(3)}} \quad (100)$$

Para evitar que a fase transiente se prolongue demais, o deslocamento total da simulação também foi vinculado por uma velocidade média mínima inferior a estipulada na condição (100). Alguns testes feitos determinaram que 0,7 m/s é um bom valor para essa velocidade média mínima, por conseguir manter a resposta com baixo erro por ruído.

Devido as restrições cinemáticas (49), o ângulo de contato entre a mão e o aro de propulsão ( $\theta$ ) é restrito a um intervalo entre  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ . Esses valores ocorrem nas situações onde  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais conforme ilustrado na figura 26.

Figura 26 – Sistema de quatro barras nos extremos de variação da fase de propulsão



Fonte: Autor

Esses valores extremos podem ser calculados aplicando a lei dos cossenos no ângulo entre a linha imaginária que liga o ombro da pessoa ao aro da roda e o raio do aro de propulsão da cadeira de rodas:

$$\theta_{min} = - \left( 90^\circ + \cos^{-1} \left( \frac{r_2^2 + p_Y^2 + p_d^2 - (p_A + p_B)^2}{2r_2 \cdot \sqrt{p_Y^2 + p_d^2}} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{p_d}{p_Y} \right) \right) \quad (101a)$$

$$\theta_{max} = - \left( 90^\circ - \cos^{-1} \left( \frac{r_2^2 + p_Y^2 + p_d^2 - (p_A + p_B)^2}{2r_2 \cdot \sqrt{p_Y^2 + p_d^2}} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{p_d}{p_Y} \right) \right) \quad (101b)$$

Em todas as simulações feitas neste trabalho, o começo do ciclo de propulsão é definido como  $\theta_i = -100^\circ$ . Tal número é coerente com a literatura, visto que a variação do ângulo de contato geralmente gira em torno de  $85^\circ$  (SLOWIK et al., 2015) que, somando essa variação ao ângulo mínimo possível de ser aplicado  $\theta_{min}$ , resulta em um ângulo de início de propulsão maior que  $90^\circ$ . Em termos da simulação de controle ótimo, esse início fixo também foi colocado

para evitar a criação exagerada de pontos de mínimo na solução, o que poderia comprometer as análises pois cada simulação poderia convergir para situações iniciais diferentes.



## 5 RESULTADOS

Na metodologia foi desenvolvido o modelo da cadeira de rodas que será utilizado para representar a cadeira de rodas e sua dinâmica nas simulações de controle ótimo, além do desenvolvimento do controlador usado no projeto para manter a velocidade próxima a definida pelo modelo de referência. No final do capítulo, desenvolveu-se as duas condições de contorno envolvidas com as simulações de controle ótimo usadas para tentar descrever situações no qual a cadeira de rodas pode encontrar no cotidiano.

As simulações também foram feitas sob duas velocidades distintas, a saber: 0,9 e 1,8 m/s. Essas velocidades são comuns em análises experimentais vistas na literatura de cadeira de rodas (COOPER et al., 2002). Assim, combinado com as duas condições de contorno, foram feitas quatro simulações para cada dado de modelo de referência/modelo do cadeirante, permitindo assim ter uma boa noção do que poderia ocorrer com a cadeira de rodas assistida em tais condições.

Neste capítulo estão ilustrados os resultados das simulações, estruturados da seguinte forma: 1) nos “efeitos da não linearidade” é discutida as diferenças do modelo de quatro barras em relação ao modelo linear e suas consequências no perfil da mão e nos torques articulares utilizados pela pessoa. 2) em “efeitos da variação da impedância”, é verificado os efeitos da variação dos parâmetros do modelo de referência na função objetivo, além do torque aplicado pelo motor. 3) em “efeitos da antropometria”, é estimado como a cadeira de rodas com controlador reagiria levando em considerações uma faixa de pessoas com diferentes perfis antropométricos em relação aos dados usados no projeto do controlador.

### 5.1 PARÂMETROS UTILIZADOS

Os dados utilizados do sistema de quatro barras, foram baseados no trabalho de Winter (2009), onde os parâmetros antropométricos são padronizados em função da altura  $h_p$  e massa  $m_p$  da pessoa. Isso ajuda o trabalho a ser baseado em uma média geral, ao invés de uma pessoa específica.

Os dados da pessoa utilizados no trabalho estão descritos na Tabela 4.

Tabela 4 – Dados de massa, inércia e biométricos da pessoa

Dados antropométricos			Dados de massa e inércia		
$p_A$	$0,186h_p$	[m]	$m_A$	$2 \cdot (0,028m_p)$	[kg]
$p_B$	$0,150h_p$	[m]	$m_B$	$2 \cdot (0,022m_p)$	[kg]
$p_a$	$0,436h_p$	[m]	$j_A$	$m_A \cdot (0,322A)^2$	[kg.m <sup>2</sup> ]
$p_b$	$0,682h_p$	[m]	$j_B$	$m_B \cdot (0,468B)^2$	[kg.m <sup>2</sup> ]
$p_Y$	$0.2 + 0.338h_p$	[m]			

Fonte: Winter, 2009

O valor de 0,2 no parâmetro  $p_Y$  representa a diferença de altura entre o banco da pessoa e o centro das rodas traseiras. As massas dos membros superiores foram duplicadas para considerar a movimentação sincronizada dos dois membros superiores da pessoa.

Os parâmetros principais da cadeira de rodas em si utilizados foram baseados no trabalho de Amâncio (2016) e se encontram descritos na Tabela 5. O valor de  $m_R$  está duplicado pelo mesmo motivo dos membros superiores da pessoa.

Tabela 5 – Parâmetros da cadeira de rodas

$m_s$	$9,52 + m_p - (m_A + m_B)$	[kg]
$m_R$	$2 \cdot 1,65$	[kg]
$r$	0,29875	[m]
$r_2$	0,26625	[m]
$j_R$	$m_R \left(\frac{r_2+r}{2}\right)^2$	[kg.m <sup>2</sup> ]
$f_{rr}$	20	[N]
$b$	5	[Ns/m]

Fonte: Amâncio, 2016

Os dados do motor foram obtidos do trabalho de Crnosija, Bjazic e Krishnan (2003) e estão descritos na Tabela 6. Tal como nos casos anteriores, equivalem aos dois motores das duas rodas traseiras com os mesmos parâmetros e se movimentando ao mesmo tempo. Isso faz com que a constante de torque seja duplicada em relação a da força contra eletromotriz, que usualmente são idênticas.

Tabela 6 – Parâmetros do motor

$L_a$	2,44	[mH]
$R_a$	1,40	[Ω]
$k_e$	0,051297	[V s]
$k_t$	$2 \cdot 0,051297$	[V s]
$b_M$	$\frac{2}{r^2} \cdot 0,002125$	[Ns/m]
$j_M$	$2 \cdot 0,0002$	[kg.m <sup>2</sup> ]

Fonte: Amâncio, 2016

Quando não melhor especificado, as simulações seguintes foram feitas com os dados anteriormente descritos para uma pessoa com 1,70 m de altura e 70 kg de massa. Tais valores são os mesmos utilizados em Ackermann et al. (2014), e configuram uma boa média para a população.

A constante do controlador foi considerada a mesma para todas as simulações com valor de  $K = 70$ . Esse valor foi obtido simulando a cadeira de rodas para várias condições de contorno, analisando com base em dificuldade de convergir (obtida para valores muito elevados) e erro da malha de velocidade (para valores muito baixos). Esse valor foi o que obteve melhor resultado ponderando essas duas coisas.



## 5.2 EFEITO DA NÃO LINEARIDADE

Na situação em que o modelo de referência é idêntico ao modelo do sistema cadeira/usuário, a malha de controle não precisa atuar e o gasto energético do motor é nulo. Entretanto, isso nunca ocorrerá com a metodologia proposta pois o modelo do sistema cadeira/usuário é não linear e o modelo de referência é linear. Nas investigações dessa seção utiliza-se um modelo de referência linear de primeira ordem que tem a melhor aproximação ao modelo não linear. Com isso, pretende-se investigar o desempenho do controle de impedância nessa situação ideal comparando seu desempenho com a malha aberta, que seria a cadeira de rodas sem assistência. O desempenho é quantificado por meio dos torques articulares do ombro ( $\tau_1$ ) e do cotovelo ( $\tau_2$ ) do usuário.

O desempenho do controle de impedância com o modelo de referência ideal é avaliado para manobras com duas velocidades médias distintas, a saber: 0,9 e 1,8 m/s. As manobras consideradas se referem a um deslocamento de 2 m de extensão, denominada aqui como “corrida energética” e outra em que o deslocamento é variável, porém com o ciclo final de propulsão com os estados finais e iniciais idênticos. Essa segunda manobra aqui é denominada por “Regime permanente”.

Como modelo de malha aberta, para uma comparação justa, foi incluída a inércia e coeficiente de atrito dinâmico do motor junto aos dados da cadeira de rodas, sem a utilização da força contra eletromotriz ou torques aplicados pelo motor. Essa condição representa um sistema dinâmico onde o motor é presente na cadeira de rodas mas, está com a assistência desativada.

### 5.2.1 Corrida energética

Neste tópico estão as simulações para as velocidades média de 0,9 m/s e 1,8 m/s, ambas são velocidades padrões na utilização de testes envolvendo cadeiras de rodas manuais. A cadeira de rodas deve percorrer ao todo 2 m de deslocamento em um tempo fixado pela velocidade média determinada anteriormente.

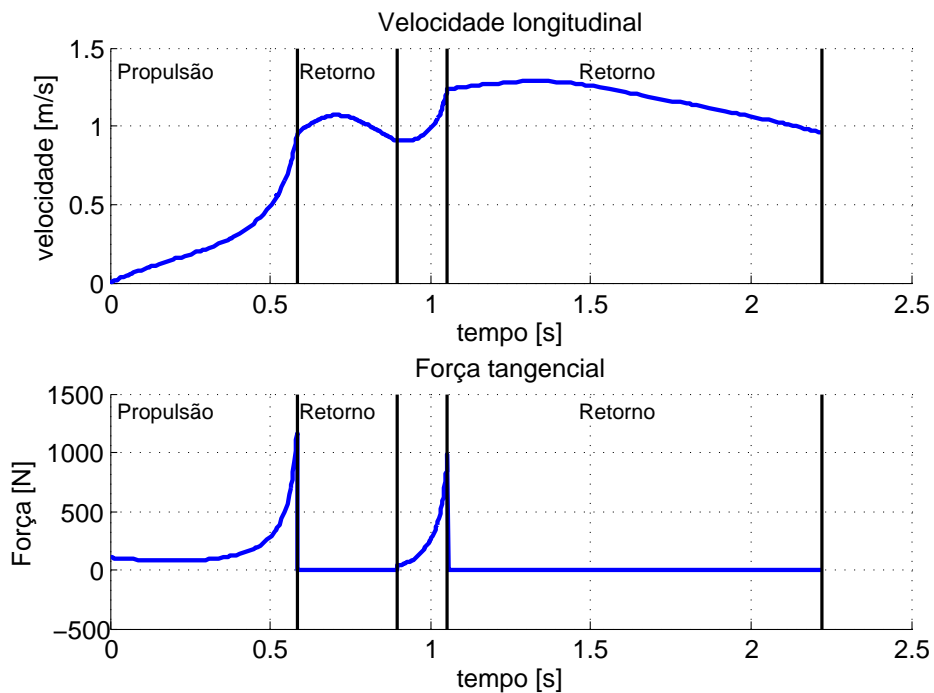
Como dois ciclos de propulsão foram utilizados, formou-se 5 fases por simulação, onde as ímpares são de propulsão e as pares de retorno.

#### 5.2.1.1 Velocidade de 0,9 m/s

Na figura 27 estão ilustrados a velocidade longitudinal da cadeira de rodas em malha aberta em função do tempo, junto com a força tangencial aplicada pela pessoa. O valor da função objetivo dessa simulação foi de 3.171,0 N<sup>2</sup>m<sup>2</sup>s.

Usando as respostas de velocidade e força tangencial da simulação da cadeira de rodas manual ilustrados na Figura 27 foram aproximados três modelos de primeira ordem pelos três

Figura 27 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total



Fonte: Autor

métodos discutidos na seção 4.3.2. As massas estimadas  $\hat{m}_t$  e atritos dinâmicos estimados  $\hat{b}_t$  estão dispostos na tabela 7.

Tabela 7 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total

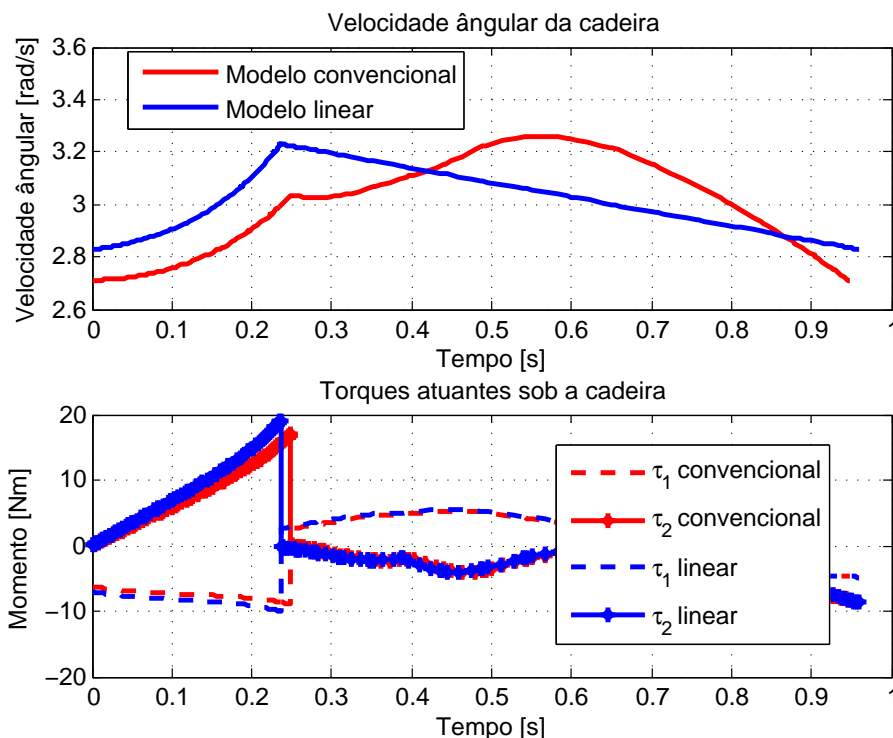
Método	$\hat{m}_t$ [kg]	$\hat{b}_t$ [N s/m]	$R$ [%]
Mínimos quadrados	114,91	21,62	83,37
Variáveis Instrumentais	108,69	22,41	79,12
Simplificação	85,77	5	70,10

Fonte: Autor

Note-se que há uma grande variação entre os parâmetros estimados, principalmente em relação ao coeficiente de atrito dinâmico obtido pelo método da simplificação, que obteve um valor muito baixo. Uma das explicações é que a força de resistência ao rolamento, para variações pequenas de velocidade, pode atuar como um atrito dinâmico equivalente, conforme foi avaliado em simulações preliminares de regime permanente com controlador perfeito (sem erros), tal como a ilustrada na figura 28.

Na figura 28, foram simulados o sistema de quatro barras e um modelo de malha fechada com realimentação de estados, considerando que todos eles podem ser lidos pelo controlador.

Figura 28 – Simulação de comparação entre modelos em regime permanente



Fonte: Autor.

Esse segundo sistema, para se aproximar do primeiro, foi necessário a aplicação de uma aproximação envolvendo o coeficiente de atrito dinâmico, a saber:

$$\hat{b}_{eq} = b + \frac{f_{rr}}{\bar{v}} \quad (102)$$

com  $\bar{v}$  sendo a velocidade média, neste caso fixa em 0,9 m/s.

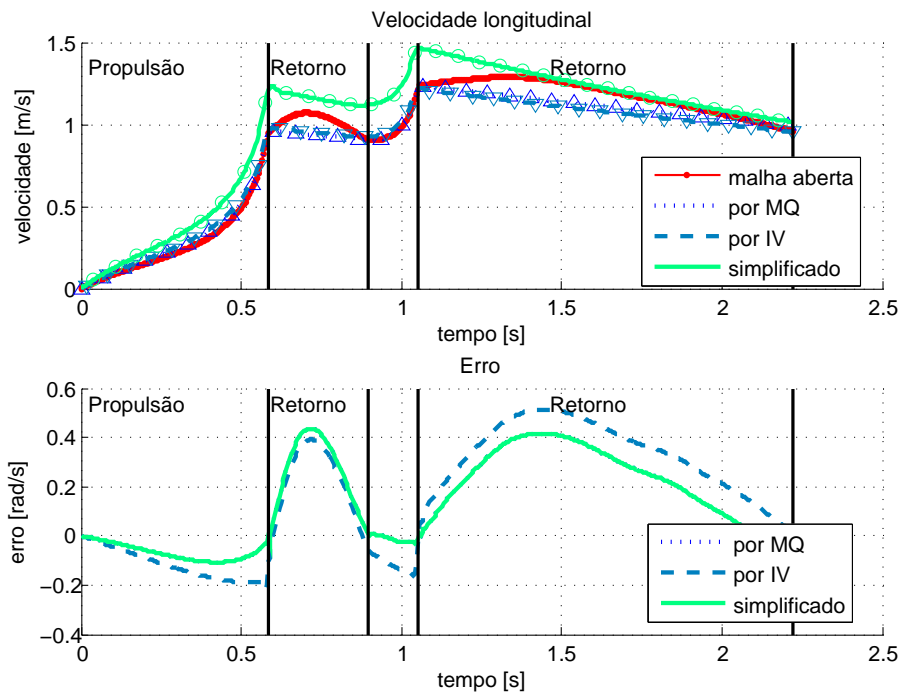
Aplicando essa aproximação nos dados de malha aberta da figura 27, o coeficiente de atrito dinâmico simplificado resulta em 27,22 N s/m o que é um valor bem mais próximo em relação aos outros métodos de identificação que o coeficiente dinâmico puro.

Integrando os três modelos aproximados de primeira ordem usando os parâmetros de massa e coeficiente de atrito dinâmico da Tabela 7 e comparando com a velocidade real do modelo de quatro barras, obtêm-se o coeficiente de correlação ( $R$  da Tabela 7) no valor de 0,8337, 0,7912 e 0,7010 para os modelos estimados utilizando as técnicas de mínimos quadrados, IV e simplificação respectivamente, desenvolvidos na sub-seção 4.3.2.1.

Na figura 29 estão ilustradas as velocidades obtidas com os modelos lineares em relação a velocidade real (não linear) do modelo de quatro barras, assim como o erro  $e$  entre elas, definido como:

$$e = \frac{v}{r} - \omega$$

Figura 29 – Comparação da velocidade estimada do modelo de primeira ordem em relação ao de quatro barras para a velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total



Fonte: Autor

Analisando a figura 29, é possível de se verificar que a fase onde se concentra a maior quantidade de erro é a de retorno, onde não existe vínculos entre os membros superiores da pessoa e a cadeira de rodas. Parte do erro é imposto no começo da fase de retorno onde a movimentação do braço e antebraço gera um ligeiro aumento de velocidade, não previsto pelo modelo de primeira ordem.

O método dos mínimos quadrados foi o que teve melhores resultados em relação aos outros, mostrando que o modelo de primeira ordem tem demasiada correlação ao modelo de quatro barras usado no trabalho.

A simplificação teve piores resultados pois, neste caso, a aproximação da força de resistência ao rolamento definida anteriormente não foi muito precisa, além de existir grandes variações na velocidade.

A simulação em malha fechada possui algumas dificuldades de convergência em relação a malha aberta devido ao maior número de variáveis envolvidas além da própria resolução da dinâmica que é mais difícil. Uma maneira de mitigar tais problemas é criar uma estimativa inicial já coerente com as respostas dinâmicas esperadas.

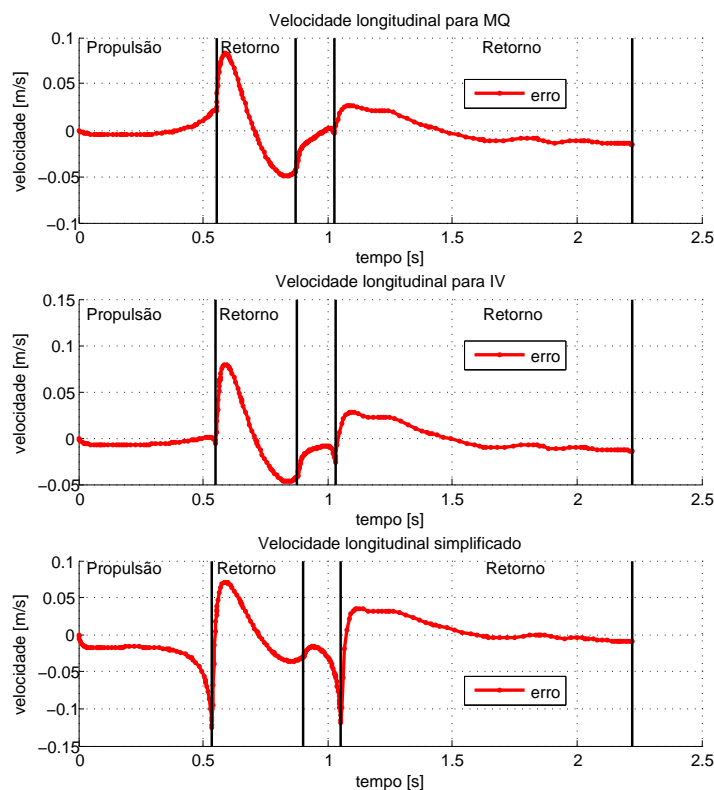
Uma boa estimativa para as simulações de malha fechada pode ser obtida da seguinte forma:

- a) Integrar as fases de propulsão utilizando como entrada os torques de malha aberta, limitando a mesma até o ângulo final de contato  $\theta_{max}$  entre a mão e o aro de tração da malha aberta;
- b) Resolver um problema de controle ótimo para as fases de retorno, considerando os estados finais da simulação anterior (de propulsão) como iniciais e os estados iniciais da próxima fase de malha aberta como estados finais. A função objetivo é similar a da malha fechada;

Como todas as simulações de malha fechada possuem uma base de comparação feita com as mesmas condições de contorno em malha aberta, o processo acima pode ser aplicado para todas as simulações de malha fechada feitas nesse trabalho.

Na figura 30 estão as velocidades reais ( $v_{real}$ ) da cadeira em comparação com as de referências ( $v_{ref}$ ) para as três estimativas anteriormente abordadas. O valor da função objetivo para os três casos foram de 3.530,9, 3.297,6 e 2.621,5  $N^2.s$  respectivamente.

Figura 30 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada para a velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total

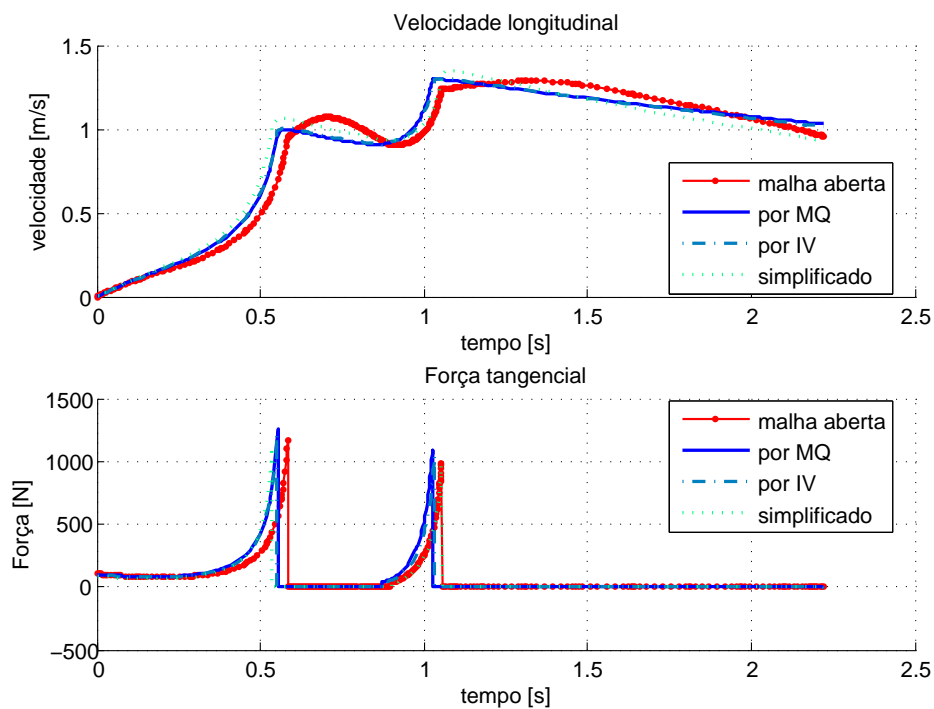


Fonte: Autor

Percebe-se na figura 30 que para os três casos o controlador foi capaz de aproximar bem o modelo não linear com o de referência, mantendo o erro baixo por toda a simulação.

Na figura 31 estão ilustradas as velocidades reais da cadeira de rodas com controlador e sem para as mesmas condições de distância e tempo fixos, além da força tangencial aplicada pela pessoa em ambas as situações.

Figura 31 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 0,9 m/s e 2 m de deslocamento total



Fonte: Autor

As curvas das respostas em malha fechada se aproximaram bem da malha aberta, tendo praticamente os mesmos tempos gastos em cada fase do ciclo de propulsão. É observado um erro maior na fase de retorno que, tal como esperado, reage de forma a ter uma queda exponencial da velocidade por não haver torques aplicados sob o modelo de referência.

A função objetivo das simulações em malha fechada tiveram valores variados em relação a função objetivo em malha aberta, tendo resultados menores (simplificação) e maiores (mínimos quadrados). Como a resposta com modelo mais próximo é a baseada em mínimos quadrados, que obteve um coeficiente de correlação de 83%, pode-se dizer que o modelo de primeiro ordem causou um aumento de aproximadamente 11% na função objetivo em relação a malha aberta.

As simulações anteriores consideram a hipótese simplificadora de que não há escorregamento das rodas traseiras da cadeira de rodas em relação ao solo, reduzindo o sistema a apenas três graus de liberdade ao invés de quatro.

Para verificar se a cadeira sob efeito de escorregamento atrapalharia o controlador, as respostas obtidas anteriormente foram integradas usando um modelo de atrito como vínculo da

velocidade angular das rodas traseiras da cadeira de rodas ( $\omega_{real}$ ) com a velocidade longitudinal ( $v_{real}$ ), que são estados distintos nesta situação.

A força de atrito entre a roda com o solo pode ser obtida por (WIT et al., 1995):

$$f_{at} = \sigma_0 \cdot z + \sigma_1 \cdot \frac{dz}{dt} \quad (103)$$

onde  $z$  é um estado extra que representa a média de deflexão das cerdas de contato entre as duas superfícies, tidas pelo modelo.  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  são parâmetros fixos do modelo que representam a rigidez e o coeficiente de atrito dinâmico das mesmas cerdas de contato.

A equação de estado da variável  $z$  é definida como:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \Delta v - \frac{\sigma_0 |\Delta v|}{g(\Delta v)} z \\ g(\Delta v) &= f_d + (f_s - f_d) \cdot \exp \left[ -(\Delta v / v_{st})^2 \right] \end{aligned} \quad (104)$$

com  $\Delta v = \omega_{real} \cdot r$  sendo a diferença de velocidade no contato das rodas com o solo,  $v_{st}$  a velocidade de Stribeck,  $f_d$  a força de atrito dinâmico de Coulomb e  $f_s$  a força de atrito estático de Coulomb.

Devido a alta não linearidade da equação 104, o resultado das simulações anteriores foram apenas integradas usando o modelo de atrito ao invés de serem simulações de controle ótimo específicas. Por causa disso, cada ciclo de propulsão nessas simulações devem ser avaliados separadamente pois a resposta da dinâmica muda quando a mesma força de atuação obtida anteriormente é utilizada, criando descontinuidades no movimento dos membros superiores da pessoa.

Os parâmetros utilizados no modelo foram:

Tabela 8 – Parâmetros utilizados no modelo de atrito.

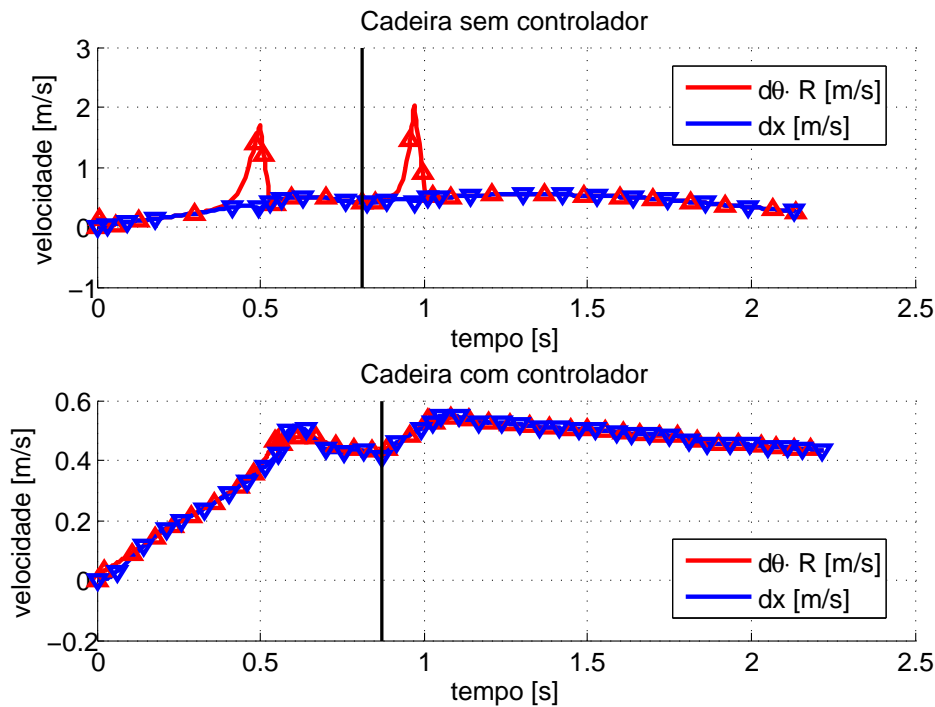
$\sigma_0$ [N/m]	$10^5$
$\sigma_1$ [Ns/m]	$\sqrt{10^5}$
$f_d$ [N]	126,21
$f_s$ [N]	176,70
$v_{st}$ [m/s]	0,01

Os parâmetros do modelo foram escolhidos de forma que, com a força aplicada, exista escorregamento em uma parte do movimento, permitindo assim verificar aproximadamente o que aconteceria nessa situação.

Os resultados estão presentes na figura 32, onde a velocidade longitudinal da cadeira de rodas se não houvesse escorregamento ( $\dot{\theta} \cdot r$ ) é comparada com a velocidade verdadeira ( $dx$ ) tanto para os torques obtidos em malha aberta e usando a aproximação de mínimos quadrados. A barra vertical serve para separar os dois ciclos de propulsão das duas simulações.

Ambas velocidades longitudinais foram bem menores em relação as respostas sem escorregamento. Esse comportamento é esperado pois boa parte da força utilizada para impulsi-

Figura 32 – Comparação entre velocidades reais e aproximadas para as simulações de corrida energética com 0,9 m/s de velocidade média



Fonte: Autor

onar a cadeira de rodas nas simulações anteriores foi desperdiçada nessa situação pelo escorregamento.

Analisando a velocidade angular da simulação em malha aberta, há a presença de um pico no final da fase de propulsão. Isso foi gerado pois, quando a cadeira de rodas começou a escorregar, as forças resistivas ao movimento perderam intensidade. Isso é uma situação ruim ao usuário pois tal aumento repentino na velocidade angular poderia causar distensões musculares nos membros superiores da mesma.

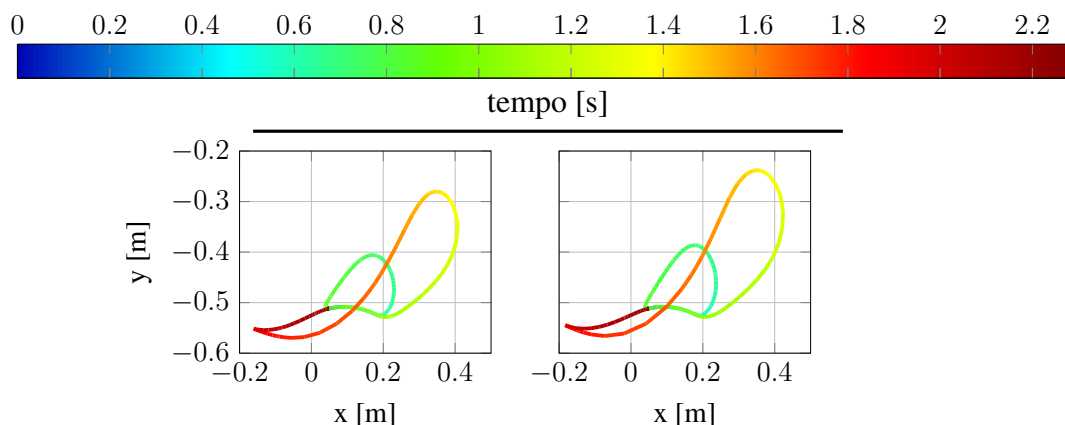
Na resposta com o controlador, a velocidade angular é mais controlada pois o modelo de referência que relaciona a força tangencial aplicada pela pessoa à velocidade de referência do controlador permanece a mesma por todo o movimento, ao passo que no caso anterior há uma redução instantânea da impedância quando as rodas traseiras da cadeira de rodas começam a escorregar.

Desta forma, o controle de impedância serviu para evitar o aumento repentino visto na velocidade angular devido à redução da resistência ao movimento gerada pelo escorregamento. Essa característica pode evitar a fadiga muscular do usuário se a cadeira de rodas encontrar uma situação repentina de escorregamento tal como a simulada.



Na figura 33 estão ilustrados o perfil do trajeto da mão nas simulações em malha aberta (à esquerda) e malha fechada usando os dados do método de mínimos quadrados (à direita). O código de cor representa a variação no tempo da posição da mão no movimento planar.

Figura 33 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m.



Fonte: Autor

O perfil da mão fez um retorno curto por cima do aro de propulsão para o primeiro ciclo, mudando para um duplo arco no segundo com maior ângulo de contato. Isso pode ser consequência das maiores velocidades envolvidas no segundo ciclo, fazendo com que o pendulamento dos membros superiores da pessoa tenha um perfil mais aberto em relação ao inicial.

Comparando os dois gráficos, percebe-se que a malha fechada causa uma leve abertura no perfil do retorno do primeiro e segundo ciclo de propulsão para além dos valores obtidos em malha aberta. Ambos os perfis seguem a mesma tendência discutida anteriormente, reforçando a similaridade de respostas obtidas pela velocidade da cadeira de rodas, além da função objetivo.

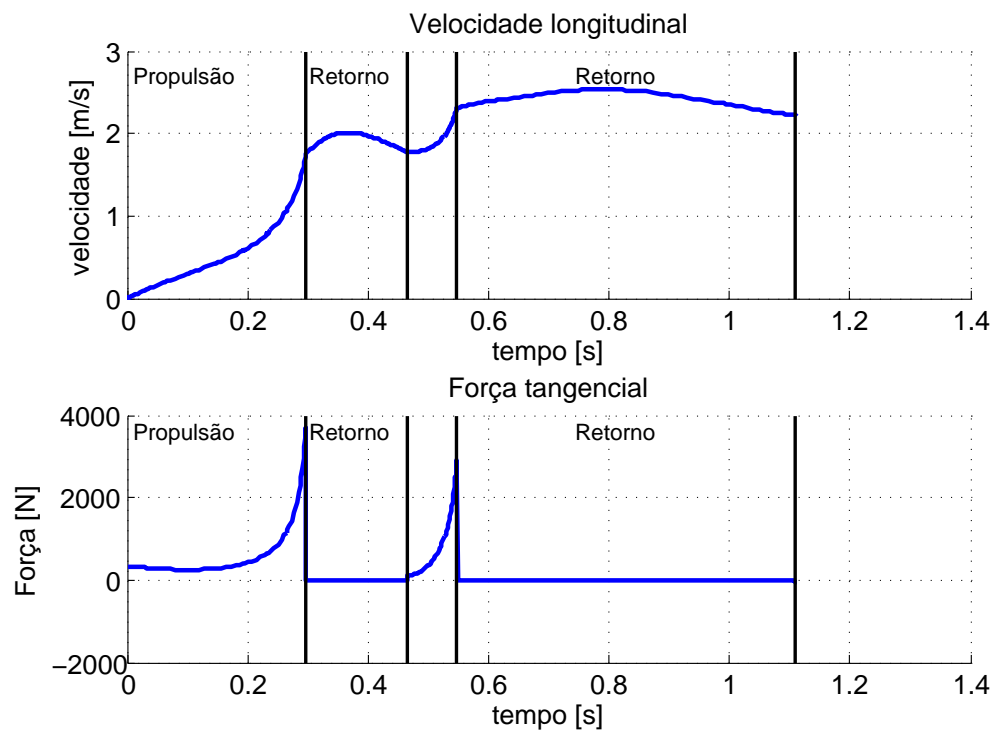
No geral as simulações de corrida energética em velocidade confortável (0,9 m/s) demonstraram que, mesmo com a diferença de natureza entre o modelo de primeira ordem em relação ao sistema de quatro barras, os torques e velocidades chegaram a valores bem próximos com perfis de mão similares entre si. Isso passa algum indício de que a cadeira de rodas por impedância possa ser intuitiva ao usuário, pois não foi necessária uma mudança brusca nos torques articulares para garantir o mínimo da função nas condições de contorno verificadas.

### 5.2.1.2 Velocidade de 1,8 m/s

Na figura 34, estão ilustradas a velocidade longitudinal da cadeira de rodas e a força tangencial aplicada pela pessoa para a simulação de malha aberta (sem assistência) com 2 m de deslocamento total em velocidade média de 1,8 m/s.

Analisando essas velocidades obtidas com as de 0,9 m/s (figura 27), percebe-se que ambas possuem o mesmo tipo de perfil e discontinuidades entre as fases de propulsão e retorno,

Figura 34 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total



Fonte: Autor

isso demonstra que, tanto em velocidades mais baixas como em elevadas o padrão da força não muda.

Tal como no caso anterior, na Tabela 9 estão os parâmetros estimados do modelo de primeira ordem equivalente para a velocidade média de 1,8 m/s. A comparação de velocidades está ilustrado na figura 35, tal como o erro entre elas.

Tabela 9 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total

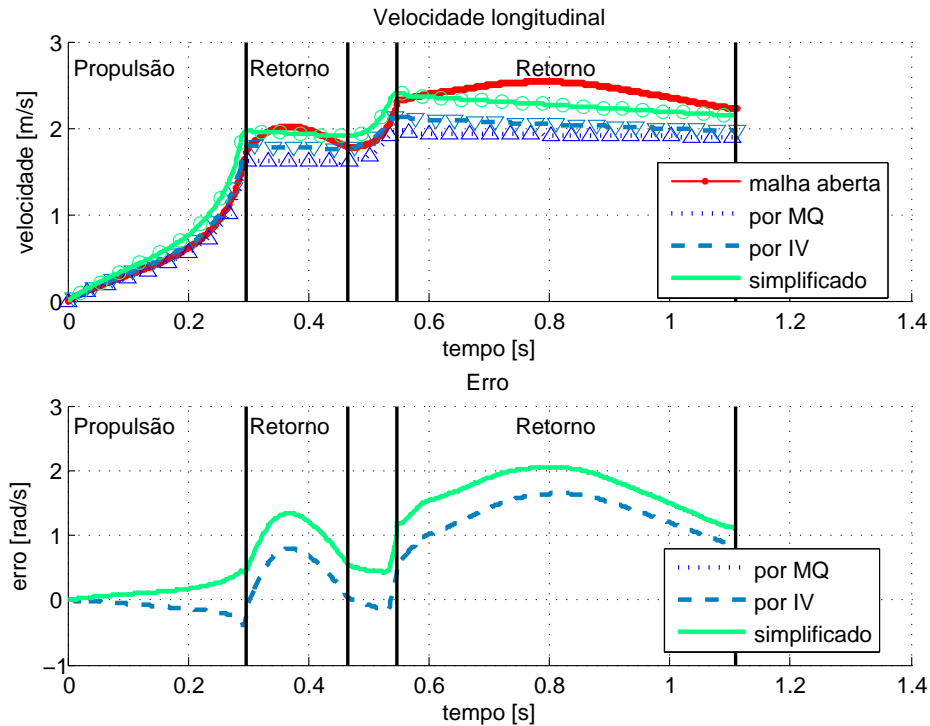
Método	$\hat{m}_t$ [kg]	$\hat{b}_t$ [N s/m]	$R$ [%]
Mínimos quadrados	118,77	5,50	65,02
IV	101,25	12,57	65,02
Simplificação	85,77	16,11	79,96

Fonte: Autor

Os valores obtidos por cada método neste caso foram bem diferentes entre si. Na figura 35 é notável a diferença entre as respostas obtidas, onde a integração do modelo obtido pelo método de mínimos quadrados exhibe fases de retorno mais planares, a resposta obtida pelo

modelo simplificado possui quedas mais bruscas e maiores acelerações enquanto a resposta do modelo obtida pelo método IV é uma média entre ambos.

Figura 35 – Comparação da velocidade estimada de primeira ordem em relação ao modelo de quatro barras para a velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total



Fonte: Autor

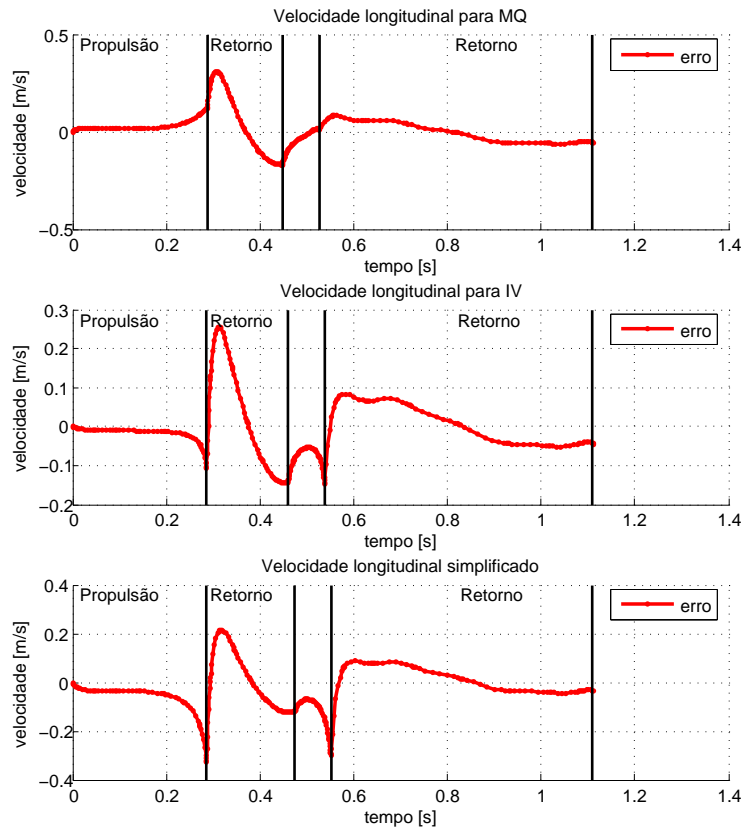
Comparando os erros entre velocidade real e de referência da Figura 35 com os da simulação anterior (Figura 29), é notável que o método de mínimos quadrados teve pior rendimento na situação atual, atingindo um coeficiente de correlação ( $R$ ) de 0,6502 em comparação com os 0,8337 obtidos na velocidade reduzida.

A identificação pelo método da simplificação ficou mais próxima para essa velocidade mais elevada, tendo um  $R$  de 0,7996, um melhor resultado que os 0,7010 da velocidade baixa. O método IV teve resposta pior, obtendo 0,6502.

Esse resultado é coerente a condição discutida na seção 4.3 que, com o aumento das forças aplicadas pela pessoa, mais próximo o modelo dinâmico de quatro barras se aproxima do modelo simplificado, utilizado na construção do controlador. As forças aplicadas pela pessoa para alcançar uma velocidade média de 1,8 m/s foram bem maiores que a utilizada para atingir 0,9 m/s, tal como pode ser observado comparando as figuras 27 e 34.

Na figura 36 estão ilustrados as velocidades reais e de referência em malha fechada. O controlador é capaz de manter o erro baixo por grande parte da simulação, tendo maiores desvios na primeira fase de retorno.

Figura 36 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada para a velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total



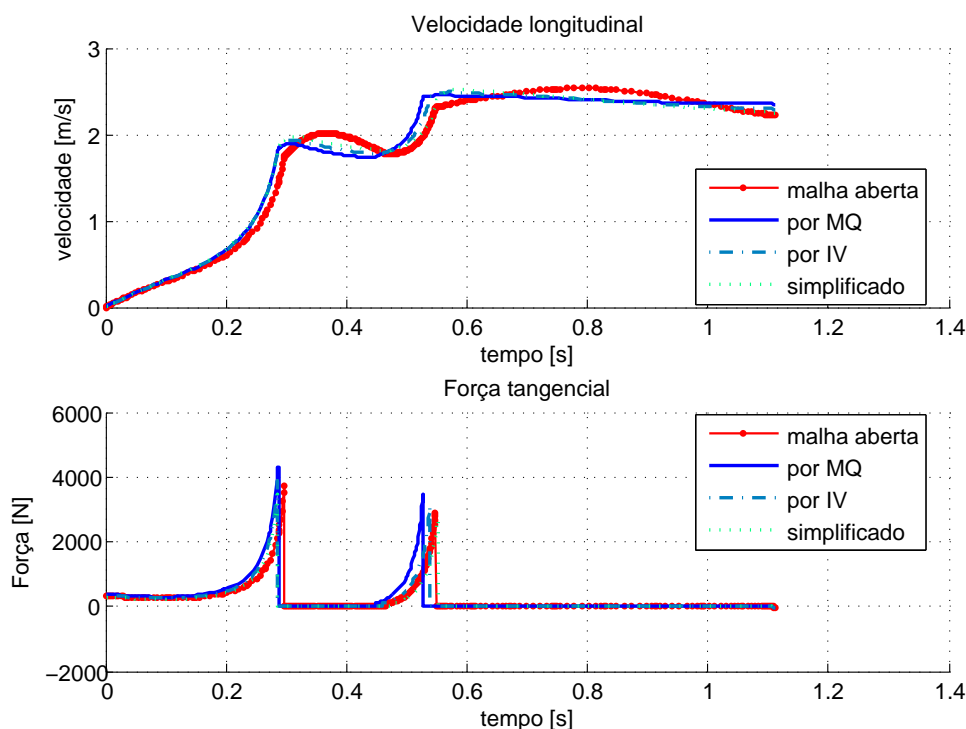
Fonte: Autor

O valor das funções objetivo obtidas em malha fechada em relação a de malha aberta foram de 23805, 19313 e 15391 contra 18127  $N^2s$  da simulação de malha aberta, demonstrando um resultado similar ao caso das simulações em velocidade menor. A simulação que teve o maior valor da função objetivo foi a dos dados obtidos por mínimos quadrados e a menor foi obtida pela simplificação. Isso sugere que o aumento da massa de referência tem influência negativa na resposta, ao passo que o coeficiente de atrito dinâmico foi até mais elevado na melhor situação obtida.

Na figura 37 estão ilustradas as forças tangenciais aplicadas pela pessoa junto com a velocidade longitudinal desenvolvida pela cadeira de rodas.

Os resultados da comparação entre malha fechada e aberta foram similares aos obtidos com velocidade reduzida (figura 31), com respostas bem próximas entre si variando entre valores maiores e menores em relação a resposta em malha aberta. Neste caso, a resposta que mais se aproximou da resposta sem assistência (a simplificação) teve função objetivo 15% menor em relação a malha aberta dando indício que talvez a relação entre coeficientes de resistência ao rolamento e massa seja o principal fator da variação, pois tanto nessa quanto na simulação

Figura 37 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 1,8 m/s e 2 m de deslocamento total



Fonte: Autor

passada a simplificação teve menores valores de função objetivo e ambas tiveram, dentre as outras aproximações do modelo não linear, as menores massas e maiores coeficientes de atrito dinâmico.

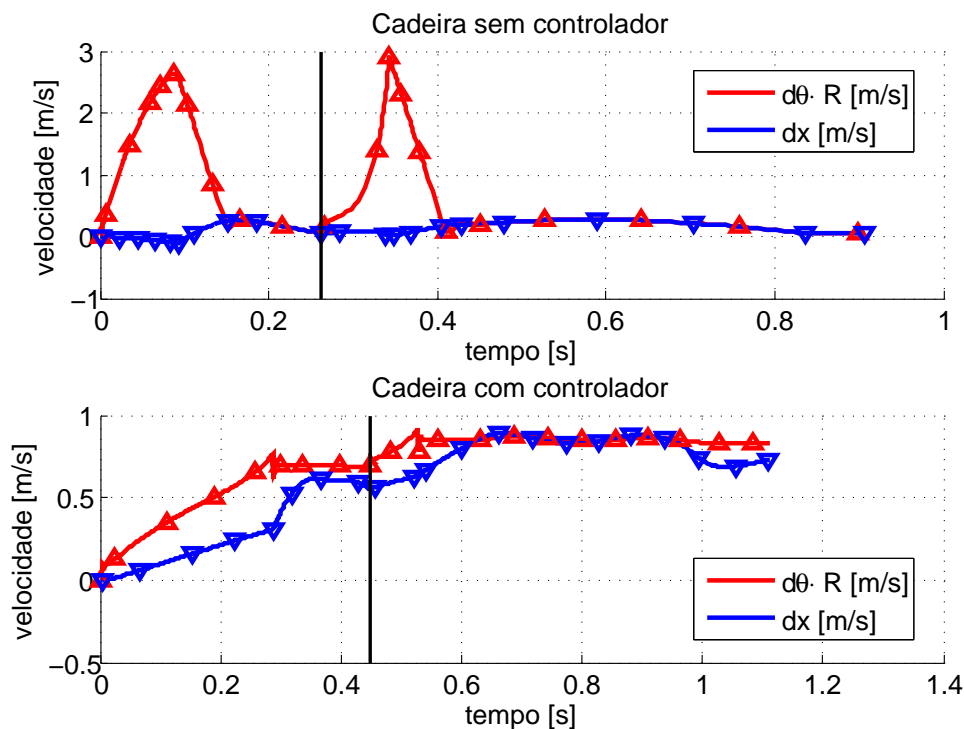
Os torques aplicados tiveram similares magnitudes e fases de propulsão ligeiramente menores que a simulação em malha aberta.

Tal como na velocidade reduzida, foi verificado como o sistema se comportaria sob uma situação de escorregamento usando o modelo de LuGre (WIT et al., 1995) que se utiliza das fórmulas (103) para a força de atrito no contato e (104) como um estado extra na integração das respostas obtidas pelas simulações anteriores.

As respostas das integrações estão ilustradas na figura 38 onde a velocidade longitudinal da cadeira de rodas se não houvesse escorregamento ( $\dot{\theta} \cdot r$ ) é comparada com a velocidade verdadeira ( $dx$ ) tanto para os torques obtidos em malha aberta e usando a aproximação de mínimos quadrados. A barra vertical serve para separar os dois ciclos de propulsão das duas simulações.

Esse resultado foi similar ao anterior, tendo altos picos na velocidade angular padronizada na simulação de malha aberta e um perfil mais controlado na simulações em malha fechada. Os picos neste caso foram mais pronunciados porque as forças obtidas nessas simula-

Figura 38 – Comparação entre velocidades reais e aproximadas para as simulações de corrida energética com 1,8 m/s de velocidade média



Fonte: Autor

ções tiveram maiores magnitudes em comparação com as anteriores fazendo com que a cadeira de rodas escorregue por um período maior.

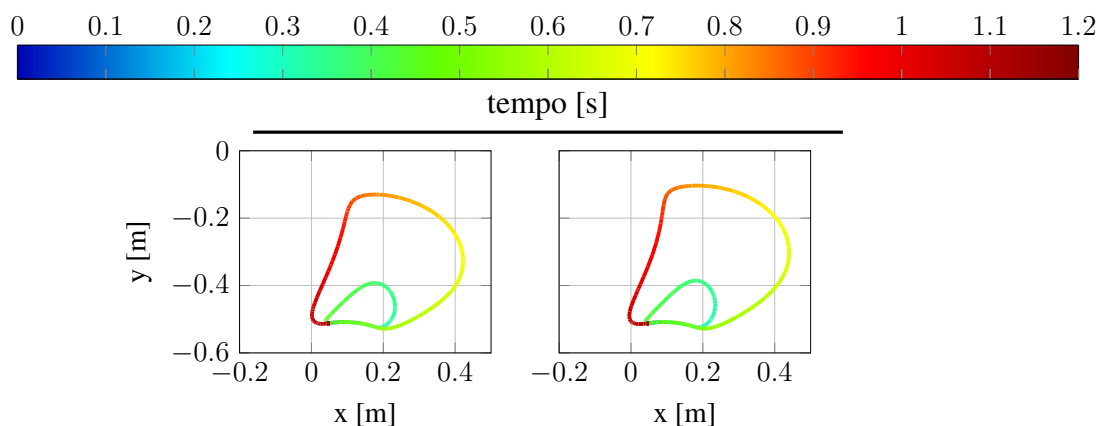
A integração com escorregamento da simulação em malha fechada com velocidade elevada teve um perfil de velocidade angular com maiores diferenças em relação a velocidade longitudinal real da cadeira de rodas. Isso se deve pois o controlador foi desenvolvido considerando a hipótese de não haver escorregamento, sendo o vínculo de impedância da força tangencial aplicado pela pessoa feito com a velocidade angular da cadeira de rodas ao invés do deslocamento longitudinal real.

Na figura 39 estão ilustrados os perfis da mão utilizados pela pessoa na simulação de malha aberta (esquerda) e malha fechada para a simulação utilizando os dados estimados pelo método da simplificação.

Verifica-se que o perfil da mão mudou em comparação com o caso anterior de velocidade mais baixa, tendo uma fase de retorno bem longa e por cima do aro de tração em todo o período. Esse comportamento foi ocasionado provavelmente pelas maiores forças aplicadas no sistema, que fazem os membros superiores da pessoa atingirem maiores acelerações e, consequentemente, necessita de maiores forças para fechar o ciclo de propulsão.

Comparando a malha aberta com a fechada, as mesmas coisas discutidas nos perfis de velocidade confortável podem ser vistos aqui; o perfil do ciclo da mão foi suavemente maior

Figura 39 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m.



Fonte: Autor

na resposta em malha fechada se comparado com a aberta e com ambas as respostas seguindo a mesma tendência discutida anteriormente, com dois arcos gradativos por cima do aro de propulsão.

## 5.2.2 Regime permanente

As simulações em regime permanente foram feitas utilizando como velocidade média final igual as simulações de corrida energética (0,9 m/s e 1,8 m/s), onde o modelo de referência foi obtido de forma similar as simulações anteriores.

### 5.2.2.1 Velocidade de 0,9 m/s

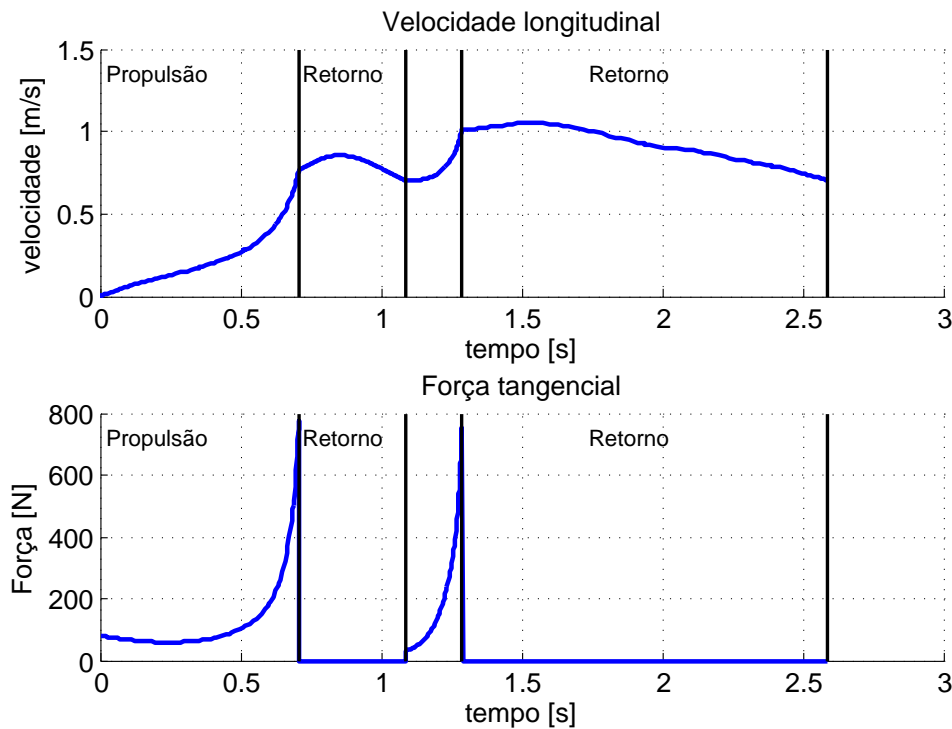
Na figura 40 estão ilustrados os perfis de velocidade longitudinal e torque tangencial aplicado na cadeira de rodas em malha aberta (sem controlador).

Observe que a resposta teve um perfil bem parecido com o da figura 27 mostrando que a simulação anterior estava em uma situação próxima do regime permanente. A velocidade mínima geral de 0,7 m/s manteve o primeiro ciclo com um tamanho demasiadamente aceitável, sem se estender por um longo tempo que poderia resultar em comprometimento da malha de pontos discretos de controle ótimo utilizada tal como verificado em simulações preliminares.

Aproximando três modelos de primeira ordem pelos mesmos métodos utilizados anteriormente, obtêm-se os dados da tabela 10.

As respostas da tabela 10 tiveram resultados parecidos com os da tabela 7, apresentando apenas valores maiores nos dados estimados. Integrando os modelos de primeira ordem e calculando o erro entre a velocidade real e a integrada tem-se a figura 41.

Figura 40 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para a velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente



Fonte: Autor

Tabela 10 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 0,9 m/s em regime

Método	$\hat{m}_t$ [kg]	$\hat{b}_t$ [N s/m]	$R$ [%]
Mínimos quadrados	122,28	27,46	78,20
IV	113,13	28,95	85,46
Simplificação	85,77	27,22	34,30

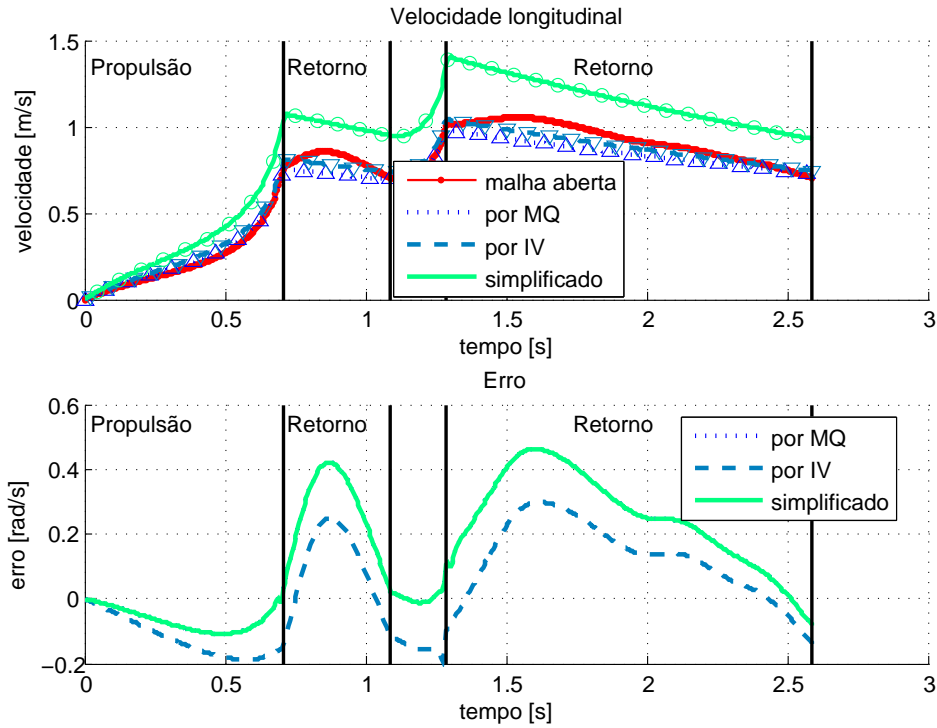
Fonte: Autor

Nesta simulação, o método dos mínimos quadrados teve melhor resultado em comparação a simulação anterior, possuindo um coeficiente de correlação ( $R$ ) na ordem de 78% porém, o mesmo tipo de perfil de erro foi obtido, reforçando a incapacidade do modelo de primeira ordem e descrever certas partes do movimento não linear da cadeira de rodas.

Todas as simulações com controlador em regime permanente apresentaram dificuldades de convergência em relação a continuidade de estados, principalmente os dois estados ligados ao erro (a parte diferencial e integral do PID). Para evitar tais problemas, foram criadas variáveis de folga onde:



Figura 41 – Comparação da velocidade estimada de primeira ordem em relação ao modelo de quatro barras para a velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente



Fonte: Autor

$$\frac{x_f^{(j)} - x_0^{(j)}}{x_0^{(j)}} - s^{(j)} = 0$$

para os estados  $j$  de integração e diferenciação do PID.

Essas variáveis extras  $s^{(j)}$  devem ser minimizadas, ou seja, devem ser colocadas junto com a função objetivo:

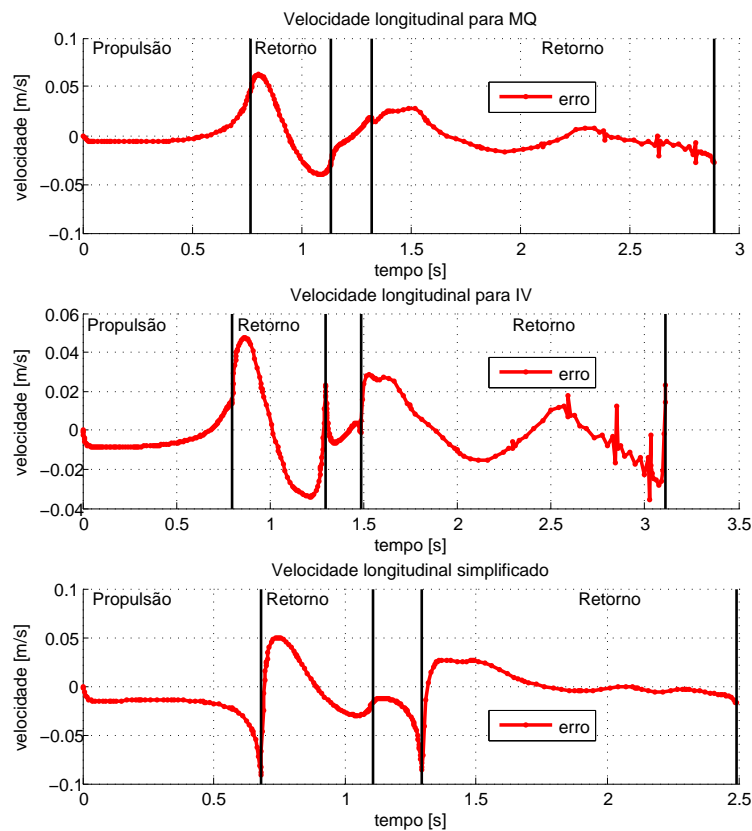
$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_f} (\tau_2^2 + \tau_1^2) dt + 1000(s^{(1)^2} + s^{(2)^2}) \quad (105)$$

O fator 1000 tem o único propósito de padronizar ordens de grandeza, forçando a minimização dos parâmetros  $s$ . Esse método de resolver restrições é bem usual na literatura de controle ótimo na resolução de restrições de desigualdade (WÄCHTER; BIEGLER, 2005).

Na figura 42 estão as comparações das velocidades dos modelos de referência e real simulados. Observe que o controlador, tal como no caso anterior, foi capaz de manter pequeno o erro, fazendo as duas velocidades ficarem bem próximas entre si nas três simulações.

Em 43 estão ilustradas as respostas da velocidade longitudinal da cadeira de rodas em malha aberta e fechada com os três modelos de referência.

Figura 42 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada em velocidade média de 0,9 m/s e regime permanente



Fonte: Autor

Observando a figura 43 e comparando com as respostas do caso anterior (figura 31), percebe-se que ambas possuem torques e velocidades bem próximas em malha fechada se comparada com a malha aberta. Isso mostra que, nas duas condições de contorno testadas, a simplificação do modelo em um grau de liberdade pode, se escolhido bem os parâmetros, responder de maneira similar a uma cadeira de rodas convencional.

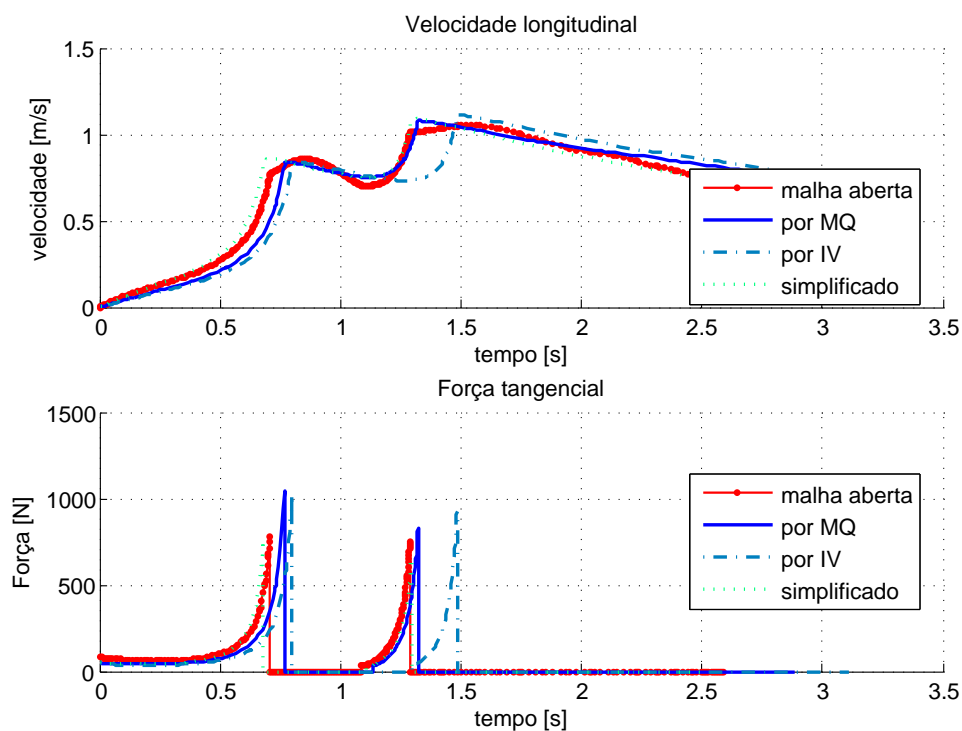
As funções objetivos gerais em malha fechada foram relativamente próximas entre si: 2.197,8, 2.030,8 e 1.392,5 N<sup>2</sup>s contra 1.938,9 N<sup>2</sup>s no caso de malha aberta. As variáveis de folga  $s$  foram bem pequenas, ficando na ordem de 0,001 e 0,01 respectivamente.

A distância total percorrida foi diferente nos três casos, resultando em: 2,02, 1,89 e 1,74 m em comparação com 1,81 m da resposta em malha aberta.

As funções objetivos em regime permanente (só avaliando o último ciclo de propulsão) tiveram maiores variações: 666,60, 812,78 e 430,70 N<sup>2</sup>s contra 547,76 N<sup>2</sup>s da malha aberta.

Na figura 44 estão ilustrados os perfis da mão aplicados pelo usuário para a simulação de malha aberta (esquerda) e malha fechada (direita) com os resultados do método IV. Tal como

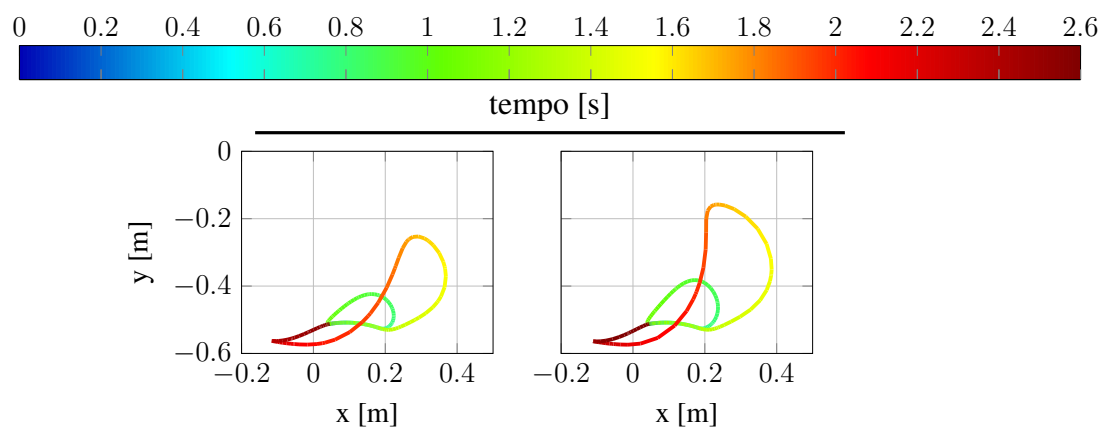
Figura 43 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente



Fonte: Autor

anteriormente discutido, a barra acima e o gradiente das linhas são referências de tempo onde ocorre o trajeto da mão.

Figura 44 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 0,9 m/s em regime permanente.



Fonte: Autor

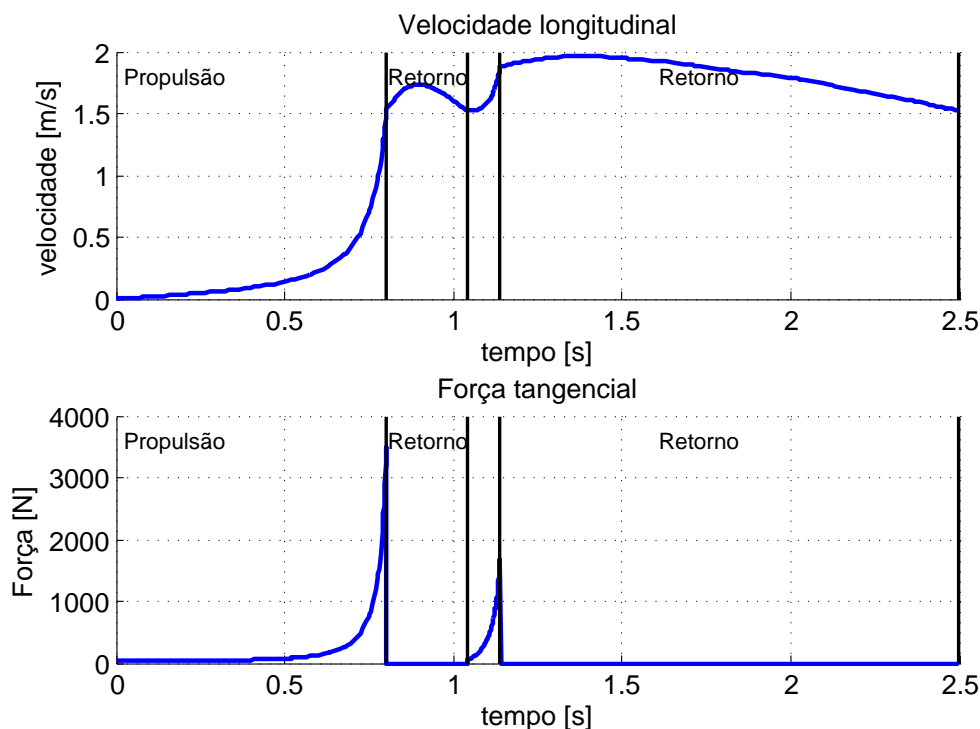
Observando os dois perfis de mão gerados em regime permanente, nota-se que o perfil com controlador é ligeiramente aberto em relação ao sem assistência, demonstrando que acelerações levemente maiores foram aplicadas neste caso.

Comparando os resultados das figuras 33 e 44, não há grande diferença entre os perfis da mão, podendo ser vistos os mesmos dois tipos de ciclos de propulsão; um com retorno por cima do aro de propulsão e ângulo de contato menor e outro com ângulo de contato maior e retorno em duplo loop.

### 5.2.2.2 Velocidade de 1,8 m/s

Na figura 45 são apresentados os resultados da simulação em malha aberta para a velocidade média de 1,8 m/s em regime permanente. Foram utilizados dois ciclos de propulsão.

Figura 45 – Simulação em malha aberta do sistema de quatro barras para a velocidade média de 1,8 m/s em regime permanente



Fonte: Autor

Em comparação com os resultados obtidos na figura 40, a simulação em maior velocidade possui aceleração menor no início da propulsão, aumentando bruscamente no final da mesma, também há a presença de uma fase de retorno inicial reduzida, ao passo que a segunda é levemente prolongada.

Na tabela 11 estão os dados obtidos pelos métodos de estimação.

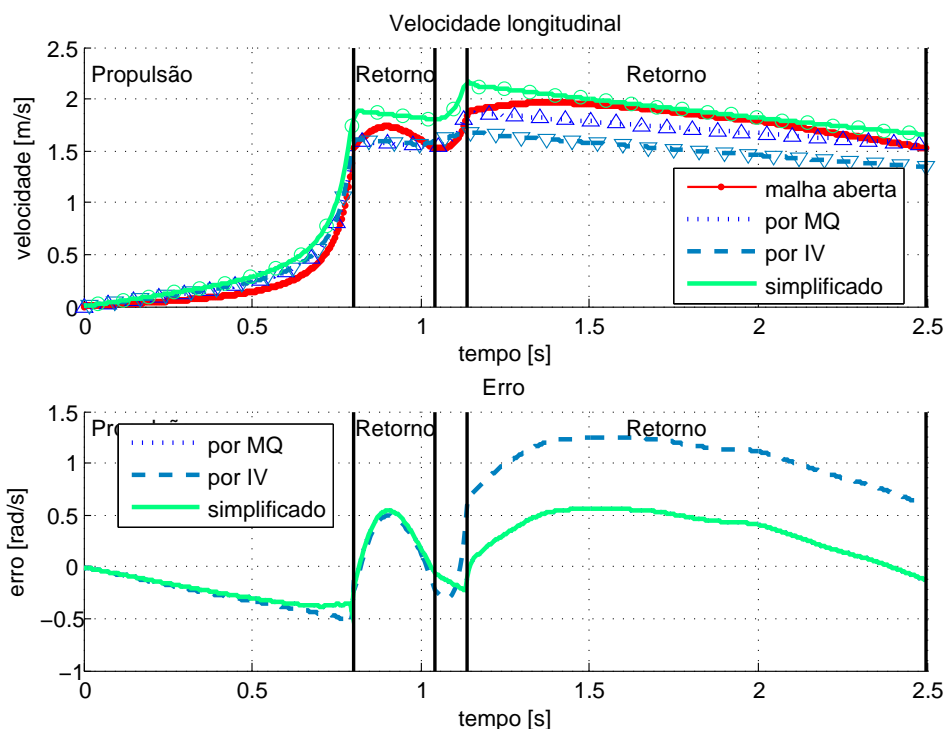
Tabela 11 – Parâmetros estimados do modelo de quatro barras para a simulação de 1,8 m/s em regime

Método	$\hat{m}_t$ [kg]	$\hat{b}_t$ [N s/m]	$R$ [%]
Mínimos quadrados	116,27	14,73	83,06
IV	105,61	17,52	54,07
Simplificação	85,77	16,11	75,88

Fonte: Autor

A situação ocorrida anteriormente é parcialmente vista neste caso, onde a simulação de mínimos quadrados obteve uma massa estimada maior e menor coeficiente de atrito dinâmico enquanto o método da simplificação teve menor massa e maior atrito dinâmico obtido. Na figura 46 está a comparação da integração desses valores estimados em relação a simulação de malha aberta obtida.

Figura 46 – Comparação da velocidade estimada de primeira ordem em relação ao modelo de quatro barras para a velocidade média de 1,8 m/s em regime permanente



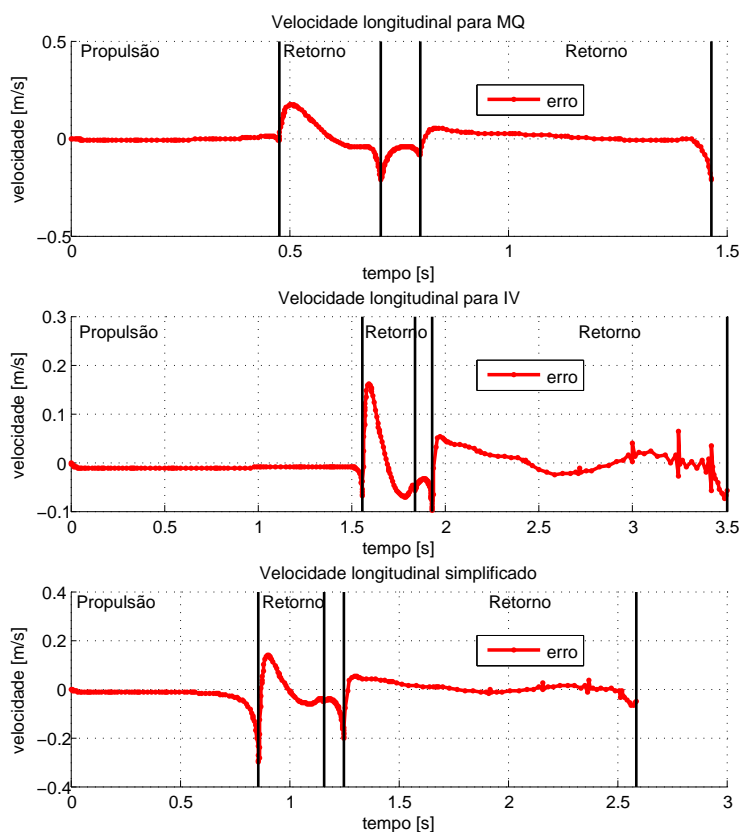
Fonte: Autor

Os valores de coeficiente de correlação ( $R$ ) para esse caso foram de 0,8306, 0,5407 e 0,7588 para as integrações dos modelos de mínimos quadrados, IV e simplificação, respectivamente.

Nesta situação, o melhor resultado foi o de mínimos quadrados enquanto a simulação por IV obteve o pior.

O resultado usando o método identificado por mínimos quadrados foi melhor que o obtido em baixas velocidades, tal como o método por simplificação. O erro do controlador das simulações em malha fechada estão ilustrados na figura 47.

Figura 47 – Comparação da velocidade real com a de referência para as simulações de malha fechada em velocidade média de 1,8 m/s e regime permanente



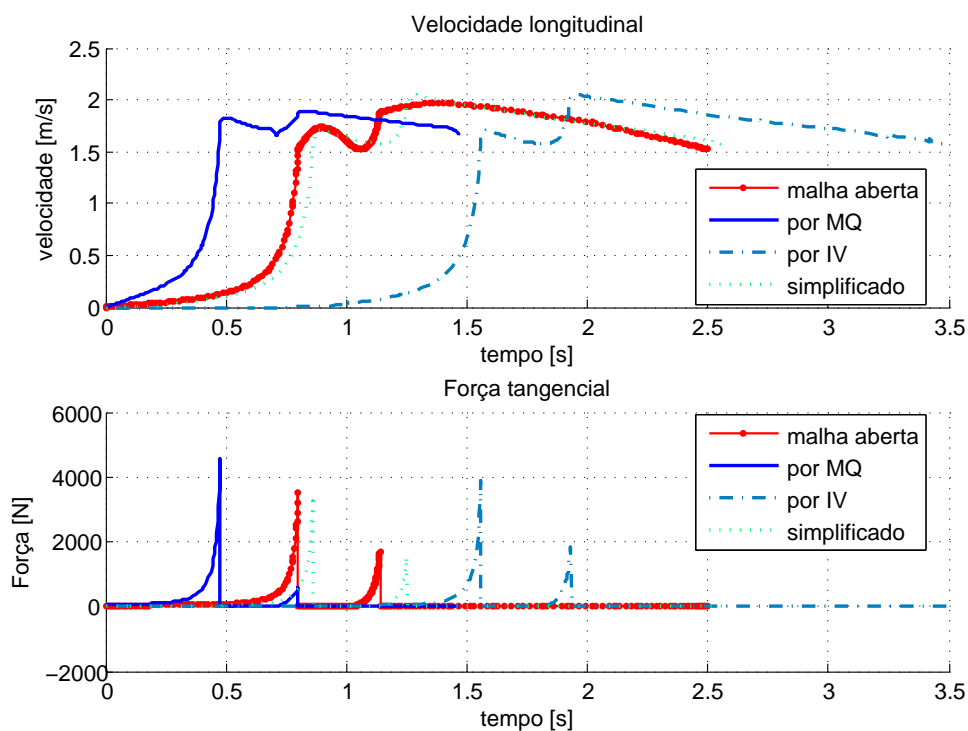
Fonte: Autor

Tal como em todos os casos anteriores, o controlador foi capaz de manter o erro baixo por todo o período da simulação.

Na figura 48 estão as curvas de velocidades longitudinais e forças tangenciais obtidas pelas simulações de malha aberta e fechada.

As forças tangenciais obtidas foram todas com o mesmo perfil, tendo picos levemente maiores no caso da simulação em malha fechada. As simulações dessa seção tiveram bastante dificuldade de convergência, resultando em erros de malha maiores que os 1,5% estipulados anteriormente. Isso explica o atraso entre curvas obtido pois a resposta usando o método IV obteve os maiores erros de malha, chegando a 4,4%.

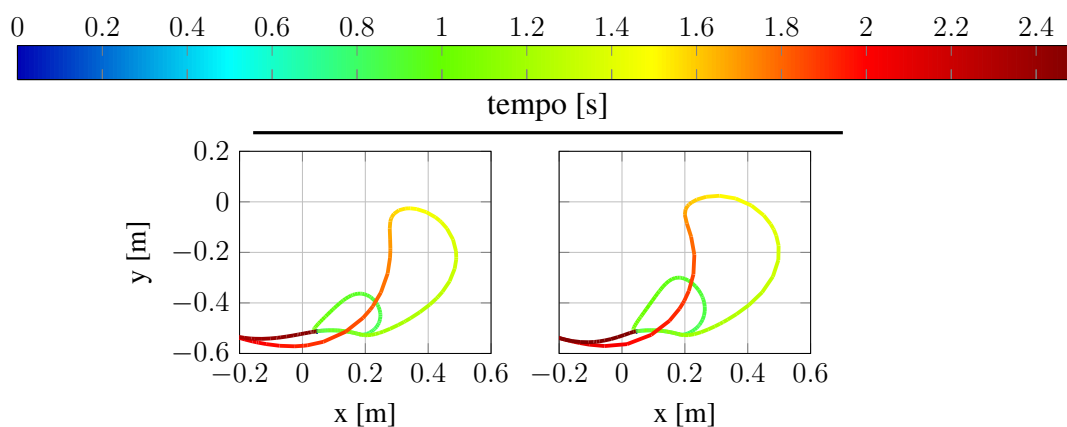
Figura 48 – Comparação entre a simulação de malha aberta com as de malha fechada para a velocidade média de 1,8 m/s em regime permanente



Fonte: Autor

Na figura 49 estão ilustrados o perfil da mão para as simulações de malha aberta (à esquerda) e malha fechada usando os dados obtidos por mínimos quadrados (à direita).

Figura 49 – Comparação do perfil da mão para as simulações de 1,8 m/s em regime permanente.



Fonte: Autor

Os deslocamentos da mão foram maiores nessa situação do que em relação a de velocidade reduzida, esse fato é coerente devido ao aumento das forças envolvidas no sistema. O perfil é praticamente o mesmo do obtido para o regime permanente em velocidade baixa (figura 44), demonstrando que esse perfil é o ideal para o deslocamento em dois ciclos.

Comparando com a corrida energética, o perfil obtido foi bem diferente em relação a figura 39, que teve maiores forças envolvidas para cumprir o deslocamento no tempo proposto e por isso necessitou de um perfil mais prolongado.

### 5.2.3 Discussão

O perfil de velocidade obtido nas simulações de malha aberta é coerente com o observado em alguns dados experimentais (figura 22), onde há um aumento da velocidade após a fase de propulsão devido a inércia dos membros superiores da pessoa. Em termos de força, os perfis não foram parecidos, atingindo valores bem elevados no final da fase de propulsão. Esse tipo de comportamento é coerente com o trabalho de Rozendaal, Veeger e L.H.V. van der Woude (2003) que prevê uma maior eficiência de movimento no final da fase de propulsão, logo o controle ótimo se utilizaria de forças com maiores magnitudes nessa região.

As diferenças de perfil nas forças também podem ter sido geradas pela falta da dinâmica dos músculos, que evitariam as descontinuidades vistas, principalmente no final das fases de propulsão. Foi estudado o uso da dinâmica de ativação neste trabalho porém, devido ao fato dessa ser extremamente rápida, as respostas finais não apresentaram grandes diferenças.

Também foi analisado restringir o torque máximo utilizado pela pessoa porém, isso gera apenas a saturação do torque aplicado pela pessoa até um certo valor (aproximadamente 110% do torque no ombro aplicado no instante inicial) onde, depois desse valor, a solução se torna impossível. Como nas simulações seguintes os parâmetros dos modelos serão variados, restringir cada simulação se tornaria problemático pois a limitação por um valor “generoso” faria grande parte das simulações terem o mesmo perfil visto anteriormente, com situações onde a saturação seria atingida e outras onde não. Com restrições mais severas, grande parte das simulações não teriam solução para as condições impostas.

A única forma encontrada de tornar essa análise justa seria restringir dinamicamente cada simulação com um limite superior diferente dependente de seu resultado sem restrições, o que apenas faria os respectivos valores de função objetivo aumentarem proporcionalmente sem mudanças de perfil ou característica, além das respostas terem um formato mais artificial em relação as sem restrições.

Na identificação o método que mais teve mais sucesso em se aproximar do modelo real da cadeira de rodas foi o de mínimos quadrados, tendo resposta ruim apenas na simulação em corrida energética em velocidade elevada. Isso indica que, mesmo com o modelo de primeira ordem não conseguindo representar toda a resposta, esse método é possível de ser utilizado para descrever suficientemente a resposta do modelo de quatro barras.



As simulações em corrida energética resultaram em funções objetivo próximas do modelo real, variando entre valores maiores e menores em relação a resposta de malha aberta. Em geral, as simulações que tiveram valores de massa menores no modelo de referência tiveram resultados abaixo da malha aberta, mesmo com coeficientes de atrito dinâmico elevados enquanto que valores maiores tiveram geralmente resultados maiores, mesmo com coeficientes de atrito dinâmico reduzidos. Isso, a um nível de detalhamento foi demonstrado nas simulações preliminares da seção 4.1, onde a resposta de parâmetros ideais da impedância teve coeficiente elevado e baixa massa em relação ao modelo real.

Com relação ao escorregamento, o controlador foi capaz de “segurar”, nas duas hipóteses testadas, a diminuição de impedância repentina causada pela perda de vínculo da velocidade longitudinal com a angular das rodas traseiras. Esse comportamento é benéfico ao uso da cadeira de rodas pois evitaria que suas rodas traseiras girassem com uma velocidade angular muito elevada enquanto o usuário traciona a mesma, situação essa que pode levar a possíveis distensões nos músculos dos braços e antebraços da pessoa.

As simulações de regime permanente também tiveram um comportamento próximo do resultado em malha aberta, respondendo, a baixa velocidade, de uma maneira bem parecida com a estimativa inicial, determinada pela malha aberta com o acréscimo da dinâmica do controlador e motor. Essa simulação teve problemas com o uso da velocidade mais elevada, respondendo ou de maneira muito rápida, como foi o caso dos mínimos quadrados, ou de maneira bem lenta, como o caso do método IV.

No geral, a compensação aparente da não linearidade no modelo não dificultou tanto a movimentação da pessoa, podendo esta fazer movimentos próximos ao da malha aberta com perfis idênticos de torques aplicados. Esse resultado, somado com o perfil da mão similar entre si mostra indícios que, mesmo com uma resposta de perfil ligeiramente diferente no modelo de primeira ordem, a assistência é intuitiva ao usuário, podendo essa, nesse caso, atuar de maneira similar a uma cadeira de rodas convencional e ainda assim obter resultados similares.

### 5.3 EFEITO DA VARIAÇÃO DE IMPEDÂNCIA

As simulações da seção anterior mostraram que o modelo de primeira ordem tem bons resultados em responder de maneira similar ao modelo de quatro barras, aqui representando a cadeira de rodas. As variações ao redor da função objetivo de malha aberta sugere que a resposta tem bastante dependência dos parâmetros escolhidos no modelo de referência, sendo interessante fazer um estudo de tal variação.

O primeiro instinto de projeto seria reduzir ao máximo a impedância (e.g. reduzir tanto a massa como o coeficiente de atrito dinâmico) porém, tal como observado nas simulações preliminares usando o modelo de primeira ordem (seção 4.1) a redução, principalmente da massa, implica em picos bem elevados no torque do motor, o que encareceria muito o projeto. É necessário haver um equilíbrio entre a redução e o esforço de controle para fazê-lo.

Por isso, nesta seção, foram simulados os efeitos da variação dos parâmetros do modelo de referência ( $m_\tau$  e  $b_\tau$ ) nos torques aplicados pela pessoa e pelo motor e no coeficiente de correlação da velocidade real em relação a de referência. As simulações foram feitas utilizando as mesmas condições de contorno vistas anteriormente, ou seja, duas situações (corrida energética e regime permanente) sob duas velocidades distintas (0,9 e 1,8 m/s).

Como para todas as simulações a resposta de malha aberta é invariante, é interessante de se avaliar a função objetivo de forma relativa, por um funcional  $S^{(1)}$ :

$$S_{ij}^{(1)} = \frac{\mathcal{J}_{MF_{i,j}}}{\mathcal{J}_{MA}} = \frac{\int_0^{t_f} [\tau_1^2 + \tau_2^2 dt]_{MF_{i,j}}}{\mathcal{J}_{MA}} \quad (106)$$

lembrando que:

$$\mathcal{J}_{MA} = \int_0^{t_f} [\tau_1^2 + \tau_2^2 dt]_{MA}$$

onde os índices  $i$  e  $j$  representam as linhas e colunas das tabelas de respostas a serem apresentadas e os índices  $MF$  e  $MA$  representam a malha fechada e aberta respectivamente.

Como simulação de malha aberta, foi considerado nesse grupo a cadeira de rodas sem a massa e coeficiente de atrito dinâmico do motor, ao oposto das simulações do item anterior. A justificativa para esse feito é de que nessas simulações, deseja-se observar a influência dos parâmetros na eficiência da assistência se comparada com a cadeira de rodas manual.

A medida que a impedância se torna distante da ideal, é plausível que o sistema passa a realizar um maior esforço de controle para a locomoção da cadeira de rodas, sendo importante analisar o quanto de energia o motor está gastando.

Sendo assim, cria-se o funcional  $S^{(2)}$  definido como:

$$S_{i,j}^{(2)} = \frac{\int_0^{t_f} \tau_\tau^2 dt}{\mathcal{J}_{MA}} \quad (107)$$

onde os índice  $i$  e  $j$  representam as linhas e colunas associados aos pares de parâmetros usados na simulação e  $\tau_\tau$  o torque aplicado pelo motor.

Esse funcional quantifica o quanto o motor está gastando em relação ao gasto da pessoa efetuado na simulação em malha aberta, que é um valor fixo. Esse fator torna a análise mais fácil pois reduz a magnitude dos números analisados.

Outro valor de importância é o coeficiente de correlação entre as curvas de velocidade de referência  $v_\tau$  e velocidade real  $v_{real}$ . Isso é importante de ser analisado pois, mede a capacidade da malha de velocidade em manter o erro pequeno.

As malhas foram criadas variando a massa de referência  $m_\tau$  de 10 até 154 kg por um passo de 16 kg e variando o coeficiente de atrito dinâmico de 5 até 41 Ns/m a um passo de 4 Ns/m. Assim, totalizam-se 100 simulações para cada velocidade média definida anteriormente.

### 5.3.1 Corrida energética

A seguir estão os resultados e discussões a respeito das simulações com velocidades médias de 0,9 m/s e 1,8 m/s nos casos de deslocamento fixo (corrida energética) de 2 m.

#### 5.3.1.1 Velocidade de 0,9 m/s

Na tabela 12 estão descritos os resultados para o funcional  $S^{(1)}$  definido em (106), variando de acordo com a massa e coeficiente de atrito dinâmico de referência.

Tabela 12 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  por impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	0,05	0,1	0,19	0,29	0,42	0,58	0,76	0,96	1,19	1,44
	9	0,09	0,13	0,22	0,33	0,46	0,62	0,81	1,02	1,25	1,51
	13	0,14	0,17	0,25	0,37	0,51	0,67	0,86	1,08	1,32	1,58
	17	0,2	0,21	0,29	0,41	0,56	0,73	0,92	1,14	1,38	1,65
	21	0,28	0,25	0,34	0,46	0,61	0,78	0,98	1,21	1,46	1,73
	25	0,38	0,31	0,39	0,51	0,66	0,84	1,05	1,28	1,53	1,81
	29	0,5	0,37	0,45	0,57	0,72	0,91	1,12	1,35	1,61	1,89
	33	0,64	0,45	0,51	0,63	0,79	0,98	1,19	1,43	1,69	1,98
	37	0,8	0,53	0,58	0,7	0,86	1,05	1,27	1,51	1,78	2,07
	41	0,99	0,62	0,66	0,78	0,94	1,13	1,35	1,6	1,87	2,17

Fonte: Autor.

As regiões mais azuis representam o local onde o fator da função objetivo são menores em relação a malha aberta, ao passo que regiões mais avermelhadas tem maiores valores.

Analisando os valores é notável que a variação é gradativa e aparentemente monotônica. A região onde o funcional  $S^{(1)}$  é próximo da unidade (situação onde a função objetivo de malha fechada é igual a de malha aberta) é aquela dada pela região branca na tabela, conforme a escala de cor abaixo da mesma.

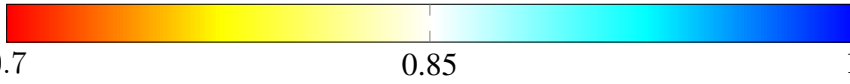
Comparando a região mais branca da Tabela 12 com os parâmetros do modelo ideal da Tabela 7, mostra-se que há vários pares de parâmetros onde energeticamente o modelo linear é próximo do não linear. As respostas obtidas pelos métodos de identificação aplicados anteriormente são aproximadamente próximos a área ilustrada.

O aumento tanto da massa quanto do coeficiente de atrito aumenta o custo de malha fechada. Isso é plausível, pois o aumento desses parâmetros faz o motor atrapalhar o movimento da pessoa que precisa aplicar maiores torques articulares.

Na tabela 13 estão ilustrados os coeficientes de correlação ( $R$ ) de todas as simulações de 0,9 m/s de velocidade média e deslocamento total de 2 m. Quanto mais vermelho a cor, menor o coeficiente de correlação obtido pela simulação.

Tabela 13 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	0,85	0,91	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,97	0,97	0,96
	9	0,82	0,9	0,93	0,94	0,96	0,97	0,98	0,97	0,97	0,95
	13	0,81	0,89	0,92	0,94	0,96	0,97	0,98	0,97	0,96	0,95
	17	0,78	0,87	0,91	0,94	0,96	0,97	0,98	0,97	0,96	0,95
	21	0,77	0,87	0,91	0,94	0,96	0,97	0,98	0,97	0,96	0,95
	25	0,76	0,86	0,9	0,93	0,95	0,97	0,98	0,97	0,96	0,95
	29	0,76	0,85	0,9	0,93	0,95	0,97	0,98	0,97	0,96	0,94
	33	0,75	0,84	0,9	0,93	0,95	0,97	0,98	0,97	0,96	0,94
	37	0,74	0,84	0,89	0,93	0,95	0,97	0,98	0,97	0,95	0,94
	41	0,73	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,97	0,97	0,95	0,94



Fonte: Autor.

Analisando a tabela, nota-se que o valor do ajuste varia pouco por todos os pontos, demonstrando que o controlador possui uma boa eficiência mesmo com variações grandes no modelo de referência ou impedância escolhida.

Os ajustes possuíram maior dependência com a massa de referência, obtendo maiores variações com a mudança desta. O aumento do coeficiente de atrito viscoso de referência possui efeito negativo nos ajustes obtidos, sendo mais drástico em regiões distantes do modelo real e quase indiferente em regiões bem próximas.

Os valores indicam que a região onde o controlador é mais eficiente é por volta de 90 e 122 kg de massa de referência, com coeficientes de correlação na faixa dos 97%.

Na tabela 14 estão discurridos os valores do fator  $S^{(2)}$  determinado na equação 107. O significado da cor é análogo ao caso da tabela 12.

Os valores da tabela 14 seguem bem a tendência dos resultados dos coeficiente de correlação ( $R$ ), variando de forma mais abrupta principalmente nas simulações de massa do modelo de referência definida como 10 kg. Isso gera a ideia de que o motor gasta mais energia em locais onde há maiores dificuldades de manter o erro da malha de velocidade baixo.

A região de pares de parâmetros onde o motor gastou menor energia em relação a pessoa (região onde os valores são bem menores que a unidade) é bem maior em comparação com a da função objetivo relativa da pessoa. Isso passa a ideia de que, salvos alguns casos específicos, o motor atuou pouco para grande parte das impedâncias simuladas.

Um fator que chama atenção nas respostas da tabela 14 em relação as de 12 é que, para o motor, o aumento do valor do coeficiente de atrito dinâmico é bem mais importante

Tabela 14 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s e deslocamento total de 2 m.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	1,7	0,81	0,52	0,33	0,2	0,12	0,09	0,09	0,14	0,22
	9	3,02	0,99	0,57	0,34	0,2	0,11	0,08	0,09	0,14	0,23
	13	5,01	1,23	0,63	0,36	0,2	0,11	0,08	0,09	0,14	0,24
	17	7,17	1,54	0,71	0,38	0,2	0,11	0,08	0,09	0,15	0,25
	21	10,3	1,9	0,81	0,41	0,21	0,11	0,08	0,1	0,16	0,26
	25	14,15	2,26	0,93	0,45	0,22	0,11	0,08	0,1	0,17	0,28
	29	18,76	2,75	1,05	0,49	0,24	0,12	0,08	0,11	0,18	0,3
	33	24,2	3,3	1,2	0,54	0,25	0,12	0,09	0,11	0,19	0,32
	37	30,71	3,92	1,37	0,6	0,27	0,13	0,09	0,12	0,21	0,34
	41	37,76	4,62	1,55	0,66	0,3	0,15	0,11	0,14	0,23	0,36

Fonte: Autor.

quando pequenas massas são utilizadas no modelo de referência, em comparação a valores de massa próximos de 100 kg. Isso passa a impressão de que o coeficiente de atrito dinâmico do modelo de referência se torna mais importante no custo de força do motor quando massas muito diferentes dos modelo real são utilizadas.

### 5.3.1.2 Velocidade de 1,8 m/s

Na tabela 15 estão mostrados as funções objetivos relativa da pessoa ( $S^{(1)}$ ) para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m.

Tabela 15 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  por impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	0,06	0,15	0,27	0,42	0,61	0,83	1,08	1,37	1,69	2,05
	9	0,09	0,17	0,29	0,44	0,63	0,86	1,12	1,41	1,73	2,09
	13	0,1	0,19	0,31	0,47	0,66	0,89	1,15	1,45	1,78	2,14
	17	0,12	0,2	0,33	0,49	0,69	0,92	1,19	1,49	1,82	2,18
	21	0,15	0,22	0,35	0,52	0,72	0,95	1,22	1,53	1,86	2,23
	25	0,17	0,25	0,38	0,54	0,75	0,99	1,26	1,57	1,91	2,28
	29	0,21	0,27	0,4	0,57	0,78	1,02	1,3	1,61	1,96	2,33
	33	0,24	0,3	0,43	0,6	0,81	1,06	1,34	1,65	2	2,39
	37	0,29	0,32	0,46	0,63	0,85	1,1	1,38	1,7	2,05	2,44
	41	0,33	0,35	0,49	0,67	0,88	1,14	1,42	1,75	2,1	2,49

Fonte: Autor.

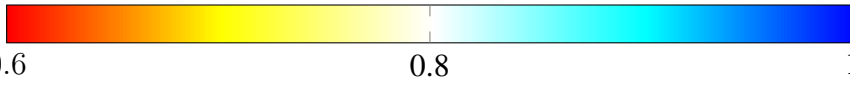
Essas simulações geraram um padrão similar ao caso da simulação de menor velocidade. A região onde a função objetivo de malha fechada é próxima a de malha aberta, neste caso, é mais dependente da massa de referência pois, cada variação na massa necessita de uma mudança maior no coeficiente de atrito dinâmico de referência para manter  $S^{(1)} \approx 1$ , em relação as simulações de velocidade média de 0,9 m/s.

Essa menor dependência do coeficiente de atrito dinâmico fez com que a região onde a função objetivo é menor fosse maior neste caso em comparação ao anterior, observado na tabela 12. Isso entrega a ideia de que a velocidade maior reduz a influência do coeficiente de atrito dinâmico em relação a massa para essa manobra em específico.

Na tabela 16 estão os coeficientes de correlação entre a velocidade de referência com a velocidade real da cadeira de rodas para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m.

Tabela 16 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m.

		Massa de referência [kg]									
X	b	10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	0,8	0,87	0,9	0,92	0,94	0,96	0,96	0,95	0,93	0,91
	9	0,76	0,86	0,89	0,92	0,94	0,96	0,96	0,95	0,93	0,91
	13	0,72	0,84	0,89	0,92	0,94	0,96	0,96	0,95	0,93	0,91
	17	0,71	0,83	0,88	0,91	0,94	0,96	0,96	0,95	0,93	0,91
	21	0,69	0,82	0,88	0,91	0,94	0,96	0,96	0,95	0,93	0,91
	25	0,68	0,81	0,87	0,91	0,94	0,96	0,96	0,95	0,93	0,9
	29	0,68	0,81	0,87	0,91	0,94	0,95	0,96	0,95	0,93	0,9
	33	0,67	0,8	0,86	0,9	0,93	0,95	0,96	0,95	0,92	0,9
	37	0,64	0,79	0,86	0,9	0,93	0,95	0,96	0,94	0,92	0,9
	41	0,64	0,79	0,86	0,9	0,93	0,95	0,96	0,94	0,92	0,89



Fonte: Autor.

Os maiores valores foram também entre 90 e 122 kg de massa de referência, porém ligeiramente menores que os do grupo de simulações em velocidade mais reduzida.

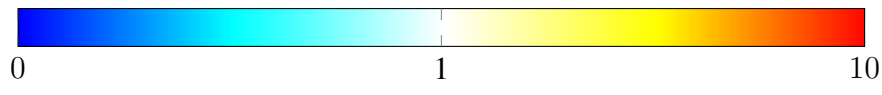
A região de menor massa de referência teve valores de coeficientes de correlação menores que em velocidade reduzida, atingindo 65% contra os 73% vistos anteriormente, mostrando que a velocidade maior fez com que fosse mais difícil de manter o erro baixo em situações onde o coeficiente de atrito dinâmico escolhido como referência é relativamente elevado e a massa do modelo de referência é relativamente baixa. Tal como nos casos anteriores não houve grandes variações do coeficiente de correlação em relação ao coeficiente de atrito dinâmico quando a massa de referência utilizada é próxima a do modelo simplificado.

Essa ideia é reforçada pela tabela 17 onde estão os valores do fator de custo energético do motor ( $S^{(2)}$ ) para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m. Nessa tabela, tal como no caso de velocidade reduzida segue bem o perfil dos coeficientes de correlação obtidos,

com uma grande região central com baixo custo energético e elevado custo na menor massa de referência simulada.

Tabela 17 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s e deslocamento total de 2 m.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	1,59	0,84	0,45	0,28	0,16	0,09	0,08	0,11	0,18	0,3
	9	1,87	0,79	0,48	0,28	0,16	0,09	0,08	0,11	0,19	0,31
	13	2,48	0,88	0,5	0,29	0,16	0,09	0,08	0,11	0,2	0,32
	17	3,25	0,98	0,53	0,3	0,16	0,09	0,08	0,12	0,2	0,33
	21	4,18	1,1	0,57	0,31	0,17	0,1	0,08	0,12	0,21	0,34
	25	5,26	1,24	0,61	0,33	0,17	0,1	0,09	0,13	0,22	0,35
	29	6,51	1,39	0,65	0,34	0,18	0,1	0,09	0,13	0,22	0,36
	33	7,94	1,55	0,7	0,36	0,18	0,1	0,09	0,14	0,23	0,37
	37	9,08	1,73	0,75	0,38	0,19	0,11	0,1	0,14	0,24	0,38
	41	10,69	1,93	0,81	0,4	0,2	0,11	0,1	0,15	0,25	0,4



Fonte: Autor.

Os valores mais baixos de fator de custo energético normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) foram obtidos por volta de 90 e 106 kg de massa de referência, não variando muito com a mudança do coeficiente de atrito dinâmico.

O padrão de resultados da tabela 17 são bem similares aos de velocidade reduzida (tabela 14) ilustrando que, o aumento da velocidade média não gerou grandes mudanças na forma que o motor gasta a energia.

### 5.3.2 Regime permanente

A seguir estão os resultados das simulações de regime permanente para as duas velocidades padrões usadas nas condições anteriores. Lembrando que a distância total percorrida (transiente+permanente) deve ter uma velocidade média mínima de 0,7 m/s para evitar erros na quadratura do método direto de otimização.

Todos os resultados apresentados nesta seção são obtidos resolvendo os funcionais  $S^{(1)}$ ,  $R$  e  $S^{(2)}$  para o ciclo final de propulsão da cadeira de rodas assistida. Neste ciclo, há a aplicação da restrição de estados finais iguais ao iniciais junto com a redução das forças aplicadas pelas pessoa, conforme função objetivo (105).

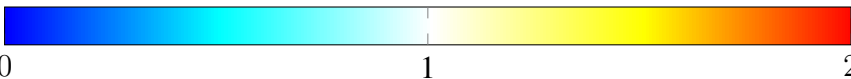
#### 5.3.2.1 Velocidade de 0,9 m/s

Na tabela 18 estão os valores do fator da função objetivo de malha fechada para as simulações de malha fechada usando 0,9 m/s de velocidade média em regime permanente. Quanto

mais próximo a cores frias (azul/ciano) menores são os valores em função da resposta de malha aberta, branco indica função objetivo similar a função de malha aberta e cores quentes (amarelo/vermelho) indicam funções objetivo de malha fechada maiores que a malha aberta.

Tabela 18 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  por impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente.

		Massa de referência [kg]										
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154	
Atrito de referência [N s/m]	X	5	0,08	0,06	0,13	0,14	0,2	0,22	6,53	0,94	1,21	5,56
	9	0,15	0,13	0,15	0,26	0,26	0,32	0,44	0,82	1,04	1,19	
	13	0,24	0,19	0,22	0,32	0,43	0,5	0,6	0,67	0,81	1,33	
	17	0,34	0,25	0,29	0,36	0,5	0,63	0,73	0,87	0,97	1,08	
	21	0,43	0,33	0,34	0,44	0,55	0,72	0,87	0,99	1,12	1,29	
	25	0,53	0,4	0,41	0,51	0,63	0,78	0,97	1,14	1,29	1,44	
	29	0,63	0,47	0,48	0,55	0,71	0,87	1,05	1,25	1,45	1,63	
	33	0,73	0,55	0,55	0,62	0,78	0,96	1,15	1,36	1,57	1,79	
	37	0,84	0,62	0,62	0,69	0,82	1,04	1,25	1,47	1,7	1,93	
	41	1,09	0,7	0,68	0,75	0,89	1,09	1,34	1,58	1,82	2,07	



Fonte: Autor.

Em comparação com o grupo de simulações passadas, a simulação em regime permanente possui uma região maior onde a função objetivo de malha fechada é menor em relação a malha aberta, mostrando que essa condição é mais favorável para a cadeira assistida em relação a manobra que envolve puramente regime transitório.

A região onde o gasto da pessoa é similar a malha aberta é bem próxima aos valores estimados na seção 5.2, essa resposta também foi verificada nas simulações de corrida energética, que teve uma tabela com um perfil bem similar a este.

Essa simulação, por ser mais livre em relação a corrida energética, também houve a presença de pontos onde a simulação convergiu em um ponto de mínimo local, não compatíveis com o padrão dos demais funcionais. Nesses pontos geralmente há a presença de maiores valores de erro de malha (erros de discretização do método de otimização direta) em relação ao resto das simulações, sendo necessário refazer várias vezes para obter valores melhores.

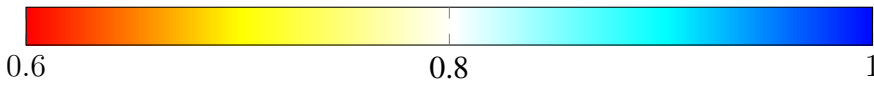
Na tabela 19 estão os coeficientes de correlação, que são métricas para os graus de ajustes das simulações de malha fechada com velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente. Valores próximos a vermelho indicam piores coeficientes de correlação enquanto valores próximos a azul indicam melhores.

Os valores obtidos na tabela 19 tiveram variações similares aos da tabela 13, tendo uma região de resposta entre 0,7 a 0,97. Tais valores, seguindo a tendência dos resultados da função objetivo, foram mais caóticos. Alguns resultados foram relativamente baixos, mas ainda assim bons.



Tabela 19 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	0,76	0,77	0,82	0,83	0,81	0,83	0,72	0,94	0,79	0,61
	9	0,76	0,79	0,82	0,86	0,84	0,87	0,89	0,96	0,95	0,92
	13	0,76	0,8	0,83	0,86	0,89	0,92	0,93	0,96	0,94	0,92
	17	0,75	0,8	0,83	0,87	0,9	0,93	0,95	0,96	0,94	0,92
	21	0,74	0,8	0,83	0,87	0,9	0,93	0,96	0,96	0,94	0,91
	25	0,73	0,8	0,84	0,87	0,91	0,94	0,96	0,96	0,94	0,91
	29	0,72	0,8	0,84	0,87	0,91	0,94	0,96	0,96	0,93	0,9
	33	0,71	0,8	0,84	0,87	0,91	0,94	0,97	0,96	0,93	0,9
	37	0,7	0,8	0,84	0,87	0,91	0,94	0,97	0,96	0,93	0,9
	41	0,72	0,79	0,83	0,87	0,91	0,94	0,97	0,96	0,93	0,9



Fonte: Autor.

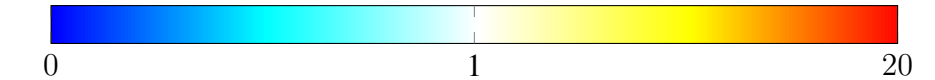
Em diferença ao caso da corrida energética, valores mais próximos de altos coeficientes de atrito dinâmico aparentam ter uma melhoria no coeficiente de correlação, principalmente perto de valores de massa de referência similares a malha aberta.

A região de maiores valores de ajustes é um pouco mais elevada em relação ao caso anterior, ficando na faixa de 106 a 122 kg na massa de referência. Note-se que a faixa de valores de massa do modelo de referência que conferem um melhor desempenho ao sistema de controle de velocidade é próxima dos valores do modelo ideal, obtido nas simulações em 5.2.

Estão presentes na tabela 20 os valores obtidos para o gasto do motor padronizado ( $S^{(2)}$ ) em função da variação da impedância para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente.

Tabela 20 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	2,31	0,52	0,62	0,43	0,25	0,24	159,15	1,73	18,41	147,76
	9	4,72	1,04	0,51	0,5	0,14	0,11	0,15	0,33	0,46	0,58
	13	7,51	1,43	0,67	0,46	0,35	0,26	0,2	0,2	0,26	0,42
	17	10	1,92	0,85	0,45	0,3	0,24	0,2	0,17	0,21	0,26
	21	12,25	2,4	0,96	0,51	0,27	0,21	0,17	0,18	0,22	0,27
	25	14,41	2,85	1,12	0,57	0,29	0,16	0,2	0,18	0,23	0,31
	29	16,57	3,27	1,27	0,62	0,32	0,16	0,11	0,26	0,27	0,34
	33	18,21	3,67	1,42	0,68	0,35	0,17	0,1	0,16	0,49	0,45
	37	20,21	4,06	1,56	0,75	0,38	0,19	0,11	0,11	0,3	0,82
	41	26,77	4,43	1,7	0,81	0,41	0,21	0,13	0,13	0,21	0,54



Fonte: Autor.

Tal como avaliado anteriormente, o gasto energético da pessoa no uso da malha fechada em relação a malha aberta foi aproximadamente igual em comparação com a tabela 14, tendo apenas leve mudanças no perfil.

A tabela 20 possui uma região (primeira linha) onde os valores obtidos foram muito elevados. Observando melhor os outros resultados desse grupo de simulações (tabelas 18 e 19) é notável que tal região possuiu respostas diferentes das de valores próximos mostrando que estas simulações convergiram em outros pontos de mínimo local.

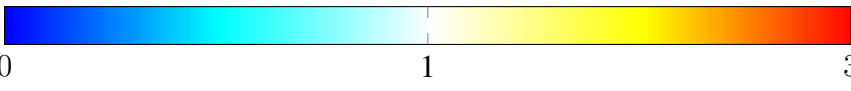
Por ser uma região bem específica onde ocorreu esse fato só em algumas simulações pontuais, é possível que tal situação seja de difícil resolução por controle ótimo, o que pode ter uma interpretação física: A massa elevada em conjunto com o atrito dinâmico baixo tendem a fazer a velocidade longitudinal variar pouco, obrigando a utilização de forças mais elevadas para impor a restrição geral de estados finais da fase de retorno do último ciclo iguais aos estados iniciais da fase de propulsão do mesmo ciclo (80).

### 5.3.2.2 Velocidade de 1,8 m/s

Na tabela 21 estão descritos os fatores de função objetivo de malha fechada obtidos para as simulações de 1,8 m/s em regime permanente.

Tabela 21 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  por impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	0,15	0,15	0,17	0,39	0,62	0,88	1,22	1,71	2,11	2,73
	9	0,26	0,24	0,3	0,32	0,67	0,88	1,15	1,58	2,07	2,63
	13	0,36	0,34	0,38	0,48	0,64	0,96	1,26	1,59	2,03	2,61
	17	0,45	0,43	0,47	0,57	0,72	0,94	0,72	0,85	2,1	2,59
	21	0,55	0,52	0,56	0,65	0,81	1,01	1,29	0,94	1,1	2,67
	25	0,64	0,6	0,64	0,74	0,88	1,1	1,36	1,7	1,18	2,67
	29	0,73	0,69	0,73	0,82	0,97	1,17	1,44	1,77	2,19	2,72
	33	0,86	0,77	0,81	0,9	1,05	1,25	1,52	1,85	2,26	2,76
	37	0,96	0,85	0,89	0,98	1,13	1,33	1,6	1,94	2,34	2,83
	41	1,06	0,94	0,97	1,06	1,21	1,41	1,68	2,02	2,42	2,9



Fonte: Autor.

Em comparação com os valores obtidos na simulação em velocidade mais lenta (tabela 18), os resultados dessa condição de simulação teve valores ligeiramente maiores, indicando que o modelo de primeira ordem implica em menor eficiência energética com o aumento da velocidade média, em regime permanente.

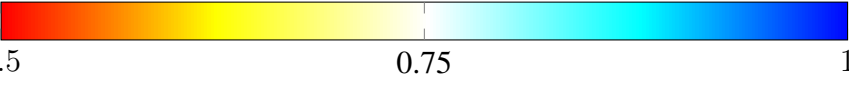
Também houve deslocamento da faixa onde a função objetivo em malha fechada é similar a de malha aberta, tendo valores mais espalhados pela tabela. Isso passa a ideia de que, em

regime permanente, a influência do coeficiente de atrito dinâmico se tornou ligeiramente maior, conflitando com o resultado da corrida energética que reduzia.

Na tabela 22 estão os coeficientes de correlação obtidos nas simulações de 1,8 m/s em regime permanente.

Tabela 22 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente.

		Massa de referência [kg]										
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154	
Atrito de referência [N s/m]	X	5	0,62	0,65	0,6	0,76	0,82	0,88	0,93	0,96	0,93	0,81
	9	0,62	0,67	0,71	0,68	0,83	0,88	0,93	0,95	0,92	0,87	
	13	0,62	0,68	0,72	0,77	0,83	0,89	0,93	0,95	0,92	0,87	
	17	0,61	0,68	0,73	0,78	0,83	0,89	0,82	0,84	0,91	0,86	
	21	0,61	0,68	0,73	0,78	0,84	0,89	0,93	0,83	0,82	0,86	
	25	0,6	0,68	0,73	0,79	0,84	0,89	0,94	0,94	0,8	0,85	
	29	0,59	0,68	0,74	0,79	0,84	0,89	0,93	0,94	0,9	0,85	
	33	0,51	0,68	0,74	0,79	0,84	0,89	0,93	0,93	0,9	0,84	
	37	0,51	0,68	0,74	0,79	0,85	0,9	0,93	0,93	0,89	0,84	
	41	0,51	0,68	0,74	0,79	0,85	0,9	0,93	0,92	0,88	0,83	



Fonte: Autor.

Os valores do coeficiente de correlação ( $R$ ) foram ligeiramente piores aos do caso anterior, variando desde 0,5 até 0,96. Esses valores mostram que o controlador tem dificuldades em manter o erro baixo em regime permanente, principalmente a condições de massa muito menores que a do sistema original.

Estão descritas na tabela 23, os custos energéticos relativos do motor em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente.

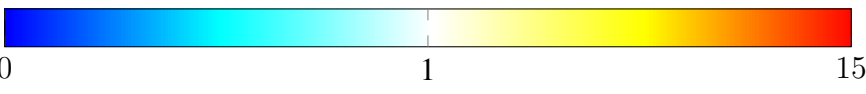
Os gastos do motor foram relativamente maiores no caso da velocidade maior em relação a menor, ilustrada na tabela 20. Essa tendência foi similar a da função objetivo da pessoa, mostrando que maiores forças aplicadas pelo usuário nem sempre implicam em menores forças aplicadas pelo motor e vice-versa.

A região da tabela onde os dados obtidos foram bem diferentes do resto das simulações foi aproximadamente a mesma, reforçando a ideia de que maiores massas de referência e baixos coeficiente de atrito geram uma condição de difícil solução para o controle ótimo, que deve ter convergido em um ponto de mínimo local diferente do resto das simulações.

No geral, o padrão de cor dos resultados apresentados pelo funcional do gasto energético do motor  $S^{(2)}$  apresentam valores um pouco diferentes das outras simulações, com pontos centrais (coeficiente de atrito dinâmico médio) obtendo menores gastos quanto massas do modelo de referência próximas de 100 kg são empregadas e maiores custos quando próximas de 10 kg.

Tabela 23 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da impedância de referência para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente.

X	b	Massa de referência [kg]									
		10	26	42	58	74	90	106	122	138	154
Atrito de referência [N s/m]	5	4	0,93	0,23	0,49	0,46	0,34	0,3	0,3	0,51	8,03
	9	7,37	1,53	0,7	0,18	0,34	0,21	0,17	0,21	0,26	0,4
	13	10,12	2,11	0,88	0,47	0,32	0,24	0,16	0,14	0,21	0,34
	17	12,57	2,61	1,05	0,54	0,29	0,17	0,09	0,08	0,21	0,32
	21	14,65	3,05	1,21	0,6	0,32	0,17	0,1	0,09	0,09	0,39
	25	16,71	3,48	1,36	0,67	0,35	0,2	0,12	0,11	0,11	1,41
	29	18,76	3,89	1,5	0,73	0,39	0,22	0,14	0,13	0,18	1,73
	33	8,81	4,25	1,64	0,79	0,43	0,24	0,16	0,15	0,2	0,33
	37	9,69	4,6	1,78	0,86	0,46	0,27	0,18	0,18	0,23	0,36
	41	10,56	4,95	1,9	0,92	0,5	0,3	0,21	0,2	0,27	0,39



Fonte: Autor.

### 5.3.3 Discussão

Nesta seção, o modelo de quatro barras desenvolvido no apêndice A foi simulado sob diversos pares de modelos de referência, com o objetivo de testar qual a influência dos parâmetros na redução dos torques articulares da pessoa. Foram avaliados três tipos diferentes de fatores: 1) o funcional de gasto energético da pessoa ( $S^{(1)}$ ), que mede quanto a pessoa gastou de energia em relação a malha aberta, 2) o coeficiente de correlação entre velocidades de referência e real para testar se o controlador foi capaz de manter o erro pequeno e 3) o funcional de gasto energético do motor ( $S^{(2)}$ ), que mede o quanto o motor gastou em função do que a pessoa gastou em malha aberta (cadeira de rodas sem assistência).

Foram testados dois tipos diferentes de condição de contorno: uma denominada como corrida energética, onde a pessoa deveria atingir uma distância em um determinado tempo e outra denominada como regime permanente, onde a pessoa partiria do repouso até uma condição onde os ciclos de propulsão se manteriam a uma velocidade média fixa.

Os perfis do funcional de gasto energético da pessoa ( $S^{(1)}$ ) para todas as simulações seguiram um padrão bem consistente, com baixos valores no uso de pequenos parâmetros de massa e coeficiente de atrito dinâmico para o modelo de referência. Isso é consistente pois a impedância virtual da cadeira de rodas se torna bem reduzida nestes casos, tendo pouca resistência a aplicação de forças pela pessoa.

As condições para a redução de esforços da pessoa nas simulações de corrida energética foram em geral mais difíceis de serem satisfeitas, necessitando de modelos de referência com massas menores em relação as simulações de regime permanente, que poderiam ser satisfeitas até com modelos próximos aos valores do modelo real. Parte da culpa desse fato pode ser da

falta de dependência da pessoa nas fases de retorno, situação onde o modelo de primeira ordem de referência reduz a velocidade dependente apenas da constante de tempo de projeto.

Com relação aos coeficientes de correlação entre a velocidade de referência e a real, os perfis responderam de maneiras ligeiramente diferentes em relação aos dois tipos de simulação usados na seção, onde na corrida energética os melhores valores se concentraram entre as massas de 90 e 106 kg com baixo coeficiente de atrito dinâmico e as simulações de regime permanente se concentraram em massas entre 106 e 122 kg com um valor mais elevado de coeficiente de atrito dinâmico. Em todas as condições, um dos piores casos foi no uso da massa de 10 kg, cuja piorava drasticamente com o aumento do coeficiente de atrito dinâmico.

O funcional de gasto energético do motor ( $S^{(2)}$ ) seguiu, em geral, uma tendência parecida ao coeficientes de correlação, tendo uma vasta região central onde o custo era bem abaixo da unidade e com um aumento drástico deste na região de massa de referência de 10 kg, a medida que o coeficiente de atrito dinâmico aumentava. A única exceção fica a parte da simulação de regime permanente a velocidade de 1,8 m/s, que possuiu maior valor com coeficiente por volta dos 29 N s/m.

As simulações em regime permanente tiveram respostas mais caóticas em comparação com a corrida energética, que respondeu de maneira bem monotônica por todas as simulações. Em especial, as simulações de controle ótimo usando massas elevadas e baixos coeficientes de atrito dinâmico no modelo de referência foram as mais difíceis de se obter uma convergência plena, com baixos níveis de erros de malha.

A velocidade teve efeito contrário nas duas condições de contorno testadas. Em termos da corrida energética, o aumento da velocidade reduziu o efeito do coeficiente de atrito dinâmico do modelo de referência, proporcionando uma área maior onde a função objetivo é menor que a malha aberta. Em contrapartida, nas simulações de regime permanente, o aumento da velocidade gerou maiores áreas brancas, reduzindo a região onde a função objetivo é pequena. O motor, em ambos os casos, não foi muito afetado, tendo comportamentos bem parecidos.

Com essas simulações, concluí-se que a redução na massa do modelo de referência pode, se escolhido com cautela, reduzir consideravelmente os torques articulares da pessoa, sem gerar forças muito elevadas a ponto de necessitar de motores de alto torque. O aumento do coeficiente de atrito dinâmico nas simulações executadas, se tornou nocivo tanto para o motor, que gasta maiores torques, quanto para a pessoa, que precisa aplicar maiores forças para manter a velocidade da cadeira de rodas.

Vale lembrar que tais análises não levam em consideração a autonomia necessária em cada situação de contorno. É provável que as regiões próximas de massa e coeficiente de atrito dinâmico reduzidos tenha baixa autonomia por necessitar de maiores forças por períodos mais prolongados em relação a uma situação um pouco mais custosa para a pessoa.

Um modelo exemplo que obteve boa resposta em todas as situações anteriores simuladas é o de massa de referência de 45 kg e coeficiente de atrito dinâmico de 15 Ns/m, cujo diminuiu

consideravelmente a função objetivo da pessoa, sem aumentar drasticamente as forças exercidas pelo motor. Tal modelo será utilizado como base para as próximas simulações.

#### 5.4 EFEITO DA VARIAÇÃO DE ANTROPOMETRIA

Nesta seção, analisa-se a influência nas respostas da variação dos parâmetros antropométricos, ou seja, a influência da resposta para pessoas diferentes daquela considerada no projeto.

Os parâmetros da pessoa presentes na tabela 4 estão padronizados de acordo com a altura e massa da mesma, facilitando a análise da influência da antropometria.

Foram consideradas 10 massas para a pessoa, cada uma com 10 alturas diferentes. Isso totaliza, tal como no caso anterior, 100 simulações para cada padrão de velocidade.

Diferente dos casos anteriores, como há variação de parâmetros intrínsecos no modelo para cada simulação, é necessário resolver o problema de controle ótimo em malha aberta para cada uma das condições de malha fechada. A estimativa inicial de ambas as simulações foi tratada da mesma forma que nos casos anteriores, onde a malha aberta usa dados tratados de (ACKERMANN et al., 2014) e a malha fechada usa uma integração da resposta de malha aberta com o acréscimo da dinâmica da malha de controle e levando em consideração os limites em  $\theta$  impostos pela cinemática discutidos no capítulo anterior.

Para efeito de comparação, foram considerados os mesmos fatores de função usados anteriormente:

$$\begin{cases} S^{(1)} = \frac{\mathcal{J}_{MF_{i,j}}}{\mathcal{J}_{MA_{i,j}}} & \text{para a relação de função objetivo da pessoa.} \\ S^{(2)} = \frac{\int_0^{t_f} f_{\xi}^2 dt}{\mathcal{J}_{MA_{i,j}}} & \text{para a relação de função objetivo do motor.} \end{cases}$$

onde  $\mathcal{J}_{MF_{i,j}}$  é a função objetivo de malha fechada e  $\mathcal{J}_{MA_{i,j}}$  é a função objetivo de malha aberta. Ambas obtidas usando os índices  $i$  e  $j$  da tabela, em função de  $m_p$  e  $h_p$ .

Analisando as tabelas de resultados por impedância, foram escolhidos os parâmetros de massa de referência de 45 kg e de coeficiente dinâmico de resistência ao rolamento de 15 N s/m. Esses valores foram escolhidos pois, implicam numa boa redução na função objetivo da pessoa, sem necessitar de elevados gastos energéticos no motor.

O vetor de massa da pessoa escolhido varia de 50 até 110 kg com um passo de 7 kg, e a altura varia de 1,50 a 2,00 m, com um passo de 0,06 m, cobrindo uma grande variedade de tipos de pessoas que poderiam utilizar da cadeira de rodas. Os parâmetros do controlador foram mantidos constantes, com base em uma pessoa de 70 kg e 1,7 m.

O padrão de cor das tabelas de resultados levaram em consideração a simulação com os parâmetros nominais da pessoa (massa de 70 kg e altura de 1,7 m) para analisar se houve piora ou melhora com a mudança dos parâmetros do modelo.

### 5.4.1 Corrida energética

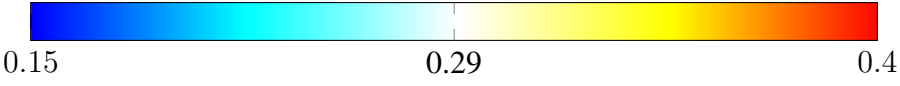
Nesta parte, estão descritas as simulações de corrida energética para as velocidades médias de 0,9 m/s e 1,8 m/s.

#### 5.4.1.1 Velocidade de 0,9 m/s

Na tabela 24 estão os resultados da relação de função objetivo da pessoa para as simulações de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento total. A simulação de malha fechada com os parâmetros nominais (pessoa usada no projeto do controlador) resulta em um fator de 0,61. O código de cor tende a valores mais próximos de azul quando o resultado é melhor que o nominal, a vermelho quando é pior e branco quando é bem próximo ao mesmo.

Tabela 24 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,2	0,19
	1,56	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,2	0,19
	1,61	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,2	0,19
	1,67	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,2	0,19
	1,72	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,2	0,19
	1,78	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,21	0,19
	1,83	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,21	0,19
	1,89	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,24	0,22	0,21	0,2
	1,94	0,38	0,35	0,42	0,29	0,27	0,25	0,24	0,22	0,21	0,2
	2	0,38	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,24	0,22	0,21	0,2



Fonte: Autor.

Em geral, com o acréscimo da massa da pessoa, a relação da função objetivo reduz consideravelmente até valores próximos de 0,2. Isso pode ser consequência do aumento das funções objetivos de malha aberta, resultando em uma relação menor já que, teoricamente, o controlador mantém o modelo de referência fixo por todas as simulações.

Para valores de massa próximos de 50 kg, o controlador com esses parâmetros passa a reagir de maneira menos eficiente em comparação ao nominal porém, ainda há melhorias em relação a malha aberta. Isso sugere que a impedância de referência deve ser ajustada em função da massa da pessoa que vai utilizá-la, se é desejado uma considerável redução nos torques articulares.

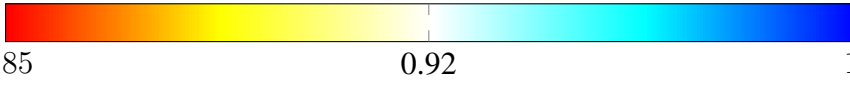
O aumento da altura da pessoa não teve um impacto forte no funcional  $S^{(1)}$ , tendo valores bem consistentes por toda a faixa da massa da pessoa estabelecida.

Houve apenas um ponto que não seguiu bem a tendência dos dados. Em comparação com as simulações anteriores porém, muitos pontos desse grupo de simulação tiveram que ser refeitos por terem valores de erro de malha superiores a tolerância definida na seção 4.3.3.

Na tabela 25 estão as respostas dos coeficientes de correlação para o conjunto de simulações de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento total percorrido. O coeficiente de correlação da simulação nominal é de 0,91.

Tabela 25 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento.

		Massa da pessoa [kg]									
x	b	50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,56	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,61	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,67	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,72	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,78	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,91	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,83	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,91	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,89	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,91	0,9	0,89	0,88	0,87
	1,94	0,95	0,94	0,95	0,92	0,91	0,91	0,9	0,89	0,88	0,87
	2	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,91	0,9	0,89	0,88	0,87



Fonte: Autor.

Observando os valores de ajustes obtidos, percebe-se que a altura da pessoa não foi um fator muito influente, tendo variação praticamente não significativa quando utilizadas massas menores de pessoa. Em comparação, a influência da massa da pessoa foi mais significativa, variando em média 0,01 por passo de valor. O maior valor obtido foi com a menor massa, de 50 kg apesar dos 70 kg usados no projeto do controlador. Isso ocorre pois o modelo de referência utiliza uma massa menor (45 kg) que a nominal de projeto.

Os valores de ajustes no geral foram muito bons, variando de 0,95 a 0,87. Esse resultado indica que o controlador é capaz de manter o erro relativamente baixo, mesmo com as variações dos valores antropométricos consideradas nestas simulações envolvendo o modelo de quatro barras.

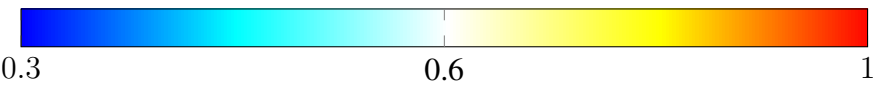
Na tabela 26 estão os resultados dos fatores de custo energético do motor obtidas na simulação. O valor de  $S^{(2)}$  para o resultado com o modelo de projeto é de 0,6.

O aumento da altura da pessoa teve efeito favorável no gasto energético motor, obtendo valores bem menores em relação aos resultados obtidos usando alturas menores. Tal resultado implica que o motor necessitou de menores forças a medida que a altura aumenta comparativamente com a função objetivo de malha aberta.



Tabela 26 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s com 2 m de deslocamento.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,44	0,54	0,63	0,71	0,79	0,87	0,93	0,99	1,04	1,08
	1,56	0,42	0,51	0,6	0,68	0,75	0,82	0,88	0,93	0,98	1,02
	1,61	0,4	0,48	0,57	0,64	0,71	0,78	0,83	0,88	0,93	0,97
	1,67	0,38	0,46	0,54	0,61	0,68	0,74	0,79	0,84	0,9	0,93
	1,72	0,36	0,44	0,52	0,58	0,65	0,7	0,77	0,81	0,85	0,89
	1,78	0,35	0,42	0,49	0,56	0,63	0,68	0,73	0,77	0,81	0,84
	1,83	0,33	0,4	0,48	0,54	0,6	0,65	0,7	0,74	0,77	0,8
	1,89	0,32	0,39	0,45	0,52	0,57	0,62	0,66	0,7	0,73	0,76
	1,94	0,31	0,35	0,58	0,5	0,55	0,59	0,63	0,67	0,7	0,73
	2	0,3	0,36	0,42	0,48	0,52	0,57	0,61	0,64	0,67	0,7



Fonte: Autor.

O aumento da massa da pessoa, no geral, fez com que o motor gastasse mais. Esse aumento pode ser consequência da menor força suprida pela pessoa em relação a malha aberta, tal como visto na tabela 24.

#### 5.4.1.2 Velocidade de 1,8 m/s

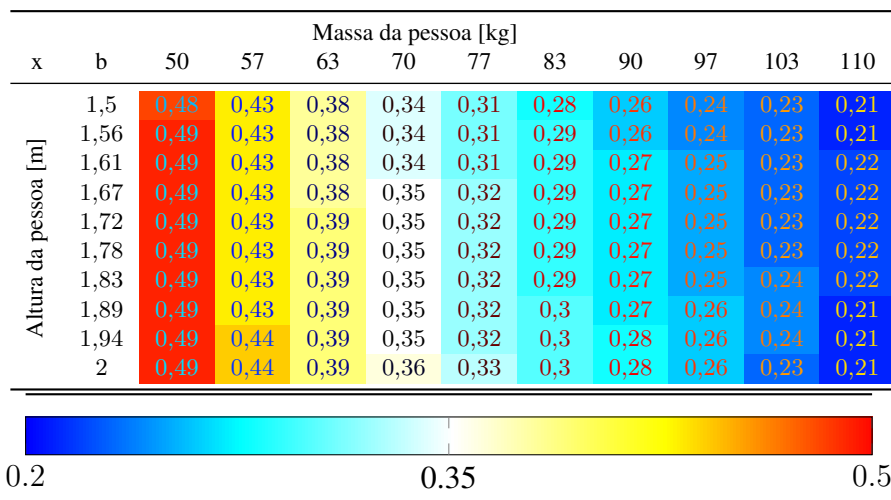
Nas tabelas 27, 28 e 29 estão as respostas para a relação da função objetivo da pessoa, o coeficiente de correlação entre as velocidades de referência e real e a relação da função objetivo do motor. Os valores obtidos para a simulação nominal foram de 0,63, 0,87 e 0,39 respectivamente.

Comparando a tabela de relação da função objetivo da pessoa (27) em velocidade maior com a de velocidade reduzida (tabela 24) é notável que a velocidade maior reduziu a influência da altura da pessoa, ao passo que esta fez os valores variarem de forma bem mais suave.

Os valores no geral foram bem parecidos que os obtidos na velocidade reduzida, tendo um intervalo praticamente idêntico. Como a dependência da altura da pessoa é reduzida com a velocidade, a variação em função da massa é um pouco maior para manter o intervalo de valores parecido. Os resultados também foram menos caóticos, tornando bem visível a influência de cada um dos parâmetros.

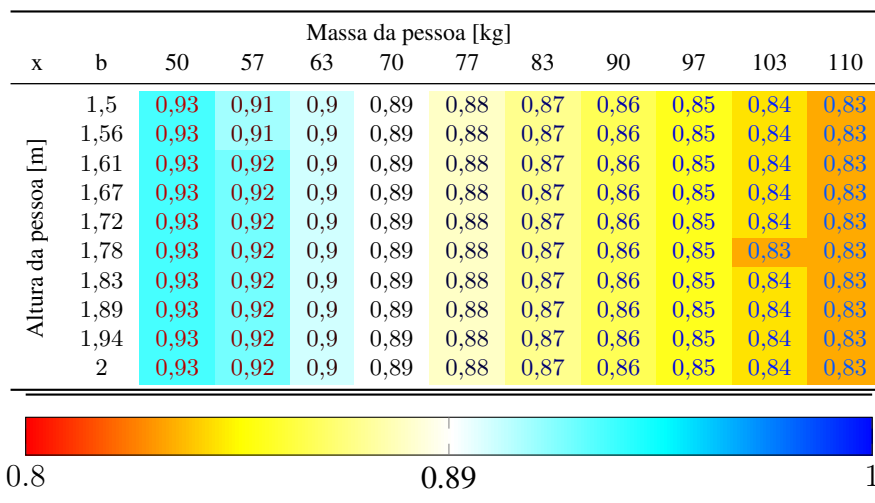
Os valores dos coeficientes de correlação entre velocidade de referência e real (tabela 28) tiveram uma variação maior com o acréscimo da velocidade, tendo muitas vezes variações acima dos 0,01 vistos na tabela 25. No geral, os valores foram reduzidos com o aumento da velocidade média, mostrando que o controle se torna mais difícil a maiores velocidades, quando utilizados parâmetros diferentes dos usados no projeto.

Tabela 27 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s com 2 m de deslocamento.



Fonte: Autor.

Tabela 28 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s com 2 m de deslocamento.



Fonte: Autor.

Em relação a altura da pessoa, os valores continuam aproximadamente sem depender da correlação, tendo praticamente nenhuma variação por toda a mesma. Comparado com as respostas em velocidade reduzida, esses valores tiveram piores resultados.

Em relação ao gasto energético do motor (tabela 29), os valores foram mais monotônicos em relação a velocidade menor, mostrando um padrão mais contínuo de respostas.

Todos os valores em velocidade maior são menores que a unidade, sugerindo que para todos os casos o motor se utilizou de menos energia que a pessoa sozinha para locomover a cadeira de rodas sem assistência. O padrão de cor indica que a dependência para velocidades

Tabela 29 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s com 2 m de deslocamento.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,38	0,45	0,51	0,56	0,61	0,65	0,68	0,7	0,73	0,74
	1,56	0,36	0,43	0,48	0,53	0,57	0,61	0,64	0,66	0,68	0,7
	1,61	0,34	0,41	0,46	0,51	0,55	0,58	0,61	0,63	0,65	0,66
	1,67	0,33	0,39	0,44	0,48	0,52	0,55	0,57	0,6	0,61	0,63
	1,72	0,31	0,37	0,42	0,46	0,49	0,52	0,55	0,57	0,58	0,6
	1,78	0,3	0,35	0,4	0,44	0,47	0,5	0,52	0,54	0,69	0,57
	1,83	0,29	0,34	0,38	0,42	0,45	0,47	0,5	0,51	0,53	0,54
	1,89	0,28	0,32	0,36	0,4	0,43	0,45	0,47	0,49	0,5	0,63
	1,94	0,26	0,31	0,35	0,38	0,41	0,43	0,45	0,47	0,48	0,6
	2	0,25	0,3	0,34	0,37	0,39	0,41	0,43	0,45	0,56	0,58

Fonte: Autor.

maiores seguiu a tendência da velocidade menor, gerando a ideia de que o custo energético do motor tem dependência com relação a altura e massa da pessoa invariante com a velocidade.

#### 5.4.2 Regime permanente

As próximas simulações, foram feitas para as condições de regime permanente para as duas velocidades testadas anteriormente. Todas as simulações tem, no mínimo, 0,7 m/s de velocidade média total. Os resultados são apresentados para as duas últimas fases da simulação, onde o regime permanente é imposto.

Tal como no caso anterior, as tabelas tem como base de cor mediana (branco) a simulação de controle ótimo usando o modelo antropométrico da pessoa usada no projeto do controlador, com 70 kg de massa e 1,7 m de altura.

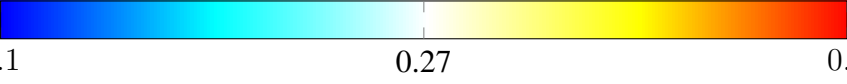
##### 5.4.2.1 Velocidade de 0,9 m/s

Nas tabelas 30, 31 e 32 estão as relações de função objetivo da pessoa, coeficientes de correlação e relações de função objetivo do motor para o conjunto de simulações de velocidade média de 0,9 m/s em regime permanente. Os resultados para o modelo nominal foram de 0,27, 0,84 e 0,67 respectivamente.

Verificando os valores da relação de função objetivo da pessoa (tabela 30), percebe-se que quase não há dependência da resposta com a altura da pessoa, exibindo uma resposta praticamente constante por toda a coluna da massa simulada. Esse comportamento é similar ao da corrida energética.

Tabela 30 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,34	0,31	0,28	0,26	0,24	0,22	0,21	0,2	0,19	0,18
	1,56	0,34	0,31	0,28	0,26	0,24	0,22	0,21	0,2	0,19	0,18
	1,61	0,35	0,31	0,29	0,26	0,24	0,23	0,21	0,2	0,19	0,19
	1,67	0,35	0,31	0,29	0,27	0,24	0,23	0,21	0,2	0,19	0,19
	1,72	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,2	0,2	0,19
	1,78	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,21	0,2	0,19
	1,83	0,36	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,21	0,2	0,19
	1,89	0,36	0,32	0,3	0,27	0,26	0,24	0,22	0,21	0,2	0,2
	1,94	0,37	0,33	0,3	0,28	0,26	0,24	0,23	0,21	0,21	0,2
	2	0,37	0,33	0,3	0,28	0,26	0,24	0,23	0,22	0,21	0,2

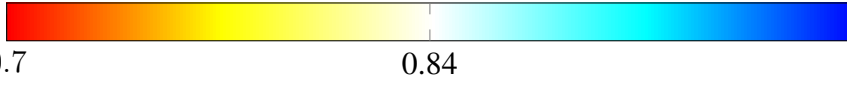


Fonte: Autor.

Os valores obtidos em geral foram bem baixos, mostrando que para essas condições de regime permanente, a cadeira de rodas assistida com controle de impedância teve um bom rendimento.

Tabela 31 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,89	0,87	0,85	0,83	0,82	0,8	0,78	0,77	0,75	0,74
	1,56	0,89	0,87	0,85	0,84	0,82	0,8	0,79	0,77	0,75	0,74
	1,61	0,89	0,87	0,85	0,84	0,82	0,8	0,79	0,77	0,76	0,74
	1,67	0,89	0,87	0,85	0,84	0,82	0,8	0,79	0,77	0,76	0,74
	1,72	0,89	0,87	0,86	0,84	0,82	0,8	0,79	0,77	0,76	0,74
	1,78	0,89	0,87	0,86	0,84	0,82	0,81	0,79	0,77	0,76	0,75
	1,83	0,89	0,87	0,86	0,84	0,82	0,81	0,79	0,78	0,76	0,75
	1,89	0,89	0,87	0,86	0,84	0,82	0,81	0,79	0,78	0,76	0,75
	1,94	0,89	0,87	0,86	0,84	0,82	0,81	0,79	0,78	0,76	0,75
	2	0,89	0,87	0,86	0,84	0,82	0,81	0,79	0,78	0,76	0,75

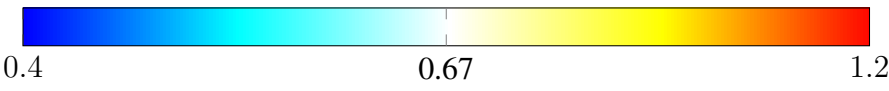


Fonte: Autor.

Tal como na resposta da corrida energética, a variação da altura também não gerou mudanças significativas nos coeficientes de correlação (tabela 31), resultando em respostas bem uniformes em cada massa da pessoa simulada. Em geral, os resultados foram piores para o caso do regime permanente em comparação com a corrida energética, ficando na região de  $[0,74; 0,89]$ . A tendência de cor foi idêntica nos casos anteriores, obtendo resultados piores com maiores massas e baixa estatura.

Tabela 32 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 0,9 m/s em regime permanente.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,51	0,6	0,69	0,77	0,84	0,89	0,95	1,01	1,07	1,13
	1,56	0,49	0,58	0,66	0,74	0,8	0,86	0,91	0,97	1,03	1,08
	1,61	0,47	0,56	0,64	0,71	0,77	0,82	0,88	0,93	0,99	1,04
	1,67	0,46	0,54	0,62	0,69	0,74	0,8	0,85	0,9	0,95	1
	1,72	0,44	0,52	0,59	0,66	0,72	0,77	0,82	0,87	0,92	0,97
	1,78	0,43	0,5	0,58	0,64	0,7	0,74	0,79	0,84	0,89	0,94
	1,83	0,42	0,49	0,56	0,62	0,68	0,72	0,77	0,81	0,86	0,91
	1,89	0,41	0,48	0,54	0,6	0,66	0,7	0,74	0,79	0,83	0,88
	1,94	0,4	0,46	0,53	0,59	0,64	0,68	0,72	0,76	0,81	0,85
	2	0,39	0,45	0,51	0,57	0,62	0,67	0,7	0,74	0,78	0,83



Fonte: Autor.

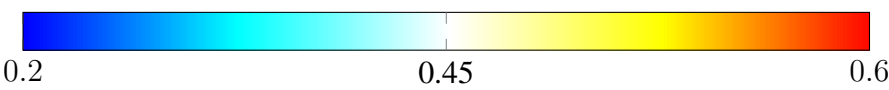
A relação da função objetivo do motor (tabela 32) teve respostas bem similares ao caso da corrida energética, tendo apenas uma maior dependência da massa da pessoa, que teve valores ligeiramente mais elevadas conforme esta variável aumentava.

#### 5.4.2.2 Velocidade de 1,8 m/s

Nas tabelas 33, 34 e 35 estão as respostas das relações da função objetivo da pessoa, ajuste de velocidades de referência com a real e a função objetivo do motor definida anteriormente. Os resultados para o modelo nominal foram de 0,45, 0,75 e 0,68 respectivamente.

Tabela 33 – Relação de funções objetivo  $S^{(1)}$  em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,55	0,49	0,45	0,41	0,36	0,32	0,3	0,28	0,27	0,26
	1,56	0,55	0,5	0,46	0,42	0,37	0,33	0,31	0,29	0,27	0,26
	1,61	0,56	0,51	0,47	0,43	0,39	0,34	0,31	0,29	0,28	0,27
	1,67	0,57	0,51	0,47	0,44	0,4	0,35	0,32	0,3	0,29	0,27
	1,72	0,57	0,52	0,48	0,45	0,41	0,36	0,33	0,31	0,29	0,28
	1,78	0,58	0,53	0,49	0,45	0,42	0,37	0,34	0,31	0,3	0,28
	1,83	0,58	0,54	0,5	0,46	0,43	0,39	0,34	0,32	0,3	0,29
	1,89	0,59	0,54	0,5	0,47	0,44	0,4	0,35	0,33	0,31	0,3
	1,94	0,6	0,55	0,51	0,48	0,45	0,41	0,36	0,34	0,32	0,3
	2	0,61	0,56	0,52	0,48	0,45	0,42	0,38	0,34	0,32	0,31

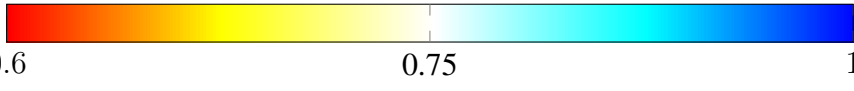


Fonte: Autor.

Em relação ao custo energético da pessoa (tabela 33), a velocidade mais elevada tornou o sistema mais dependente da altura da pessoa, com variações de 0,07 em relação aos 0,03 obtidos anteriormente para a massa de 70 kg por exemplo. Os valores também foram maiores, passando de um região de  $[0,18; 0,37]$  a  $[0,26; 0,61]$  mostrando que a pessoa gastou mais energia em relação a malha aberta para cumprir a maior velocidade, esse fato é principalmente verdadeiro nas maiores massas.

Tabela 34 – Coeficientes de correlação ( $R$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,82	0,79	0,76	0,73	0,71	0,68	0,66	0,64	0,62	0,6
	1,56	0,82	0,79	0,76	0,73	0,71	0,68	0,66	0,64	0,62	0,6
	1,61	0,82	0,79	0,76	0,73	0,71	0,69	0,66	0,64	0,62	0,6
	1,67	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71	0,69	0,66	0,64	0,62	0,6
	1,72	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67	0,64	0,62	0,61
	1,78	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67	0,65	0,63	0,61
	1,83	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67	0,65	0,63	0,61
	1,89	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67	0,65	0,63	0,61
	1,94	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67	0,65	0,63	0,61
	2	0,82	0,79	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67	0,65	0,63	0,61



Fonte: Autor.

Os coeficientes de correlação entre a velocidade de referência com a real (tabela 34) foram piores com o aumento da velocidade, principalmente nos patamares de maiores massas da pessoa, obtendo valores de 0,6 contra os 0,75 obtidos anteriormente. Para massas da pessoa de menor magnitude os valores também foram piores porém em menores magnitudes. A influência com a altura da pessoa se manteve quase nula em relação a velocidade de 0,9 m/s.

Em comparação com o gasto de força do motor em velocidade menor (tabela 32), os resultados a 1,8 m/s (tabela 35) teve quase o mesmo padrão de comportamento, apenas obtendo custos energéticos maiores em relação ao nominal determinado anteriormente.

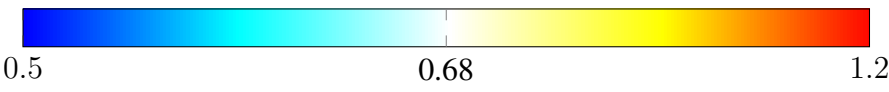
### 5.4.3 Discussão

Nesta seção foram simulados os efeitos da variação da altura e massa do cadeirante na dinâmica do controlador, mantida com base em uma pessoa padrão de 70 kg de massa e 1,7 m. Os resultados foram divididos em função da resposta da cadeira de rodas sem assistência para avaliar se houve ganhos com o acréscimo do controlador. O modelo de referência também foi fixado, sob os valores de 45 kg de massa e 15 N s/m de coeficiente de atrito dinâmico.

O modelo nominal usando a pessoa base de 70 kg de massa e 1,7 m também foi simulado, para avaliar se a mudança da pessoa afeta positiva ou negativamente em relação aos dados

Tabela 35 – Fator de custo normalizado do motor ( $S^{(2)}$ ) em função da antropometria para a simulação de 1,8 m/s em regime permanente.

x	b	Massa da pessoa [kg]									
		50	57	63	70	77	83	90	97	103	110
Altura da pessoa [m]	1,5	0,62	0,74	0,84	0,93	0,95	0,98	1,03	1,09	1,13	1,18
	1,56	0,6	0,72	0,82	0,91	0,94	0,96	1,01	1,05	1,1	1,15
	1,61	0,58	0,69	0,8	0,88	0,94	0,94	0,98	1,02	1,07	1,11
	1,67	0,56	0,68	0,77	0,86	0,92	0,92	0,96	1	1,04	1,08
	1,72	0,55	0,66	0,75	0,84	0,91	0,91	0,94	0,97	1,02	1,06
	1,78	0,53	0,64	0,73	0,82	0,89	0,91	0,92	0,95	0,99	1,03
	1,83	0,52	0,62	0,72	0,8	0,87	0,9	0,9	0,93	0,97	1,01
	1,89	0,51	0,61	0,7	0,78	0,85	0,9	0,89	0,91	0,95	0,98
	1,94	0,49	0,59	0,68	0,76	0,83	0,88	0,88	0,9	0,93	0,96
	2	0,49	0,58	0,67	0,75	0,82	0,87	0,87	0,88	0,91	0,94



Fonte: Autor.

de projeto. Foram avaliados o custo energética da pessoa (equação 106), o coeficiente de correlação entre as velocidades reais e de referência ( $R$ ) e o custo energético do motor (equação 107).

Os gastos energéticos da pessoa, em relação a malha aberta, teve comportamentos diferenciados em função do tipo de condição de contorno da simulação. As simulações em corrida energética por exemplo, obteve piores resultados para pessoas com baixa massa, sem forte dependência com a altura ao passo que nas simulações de regime permanente as pessoas mais prejudicadas pelo controlador foram as de baixa massa e maior altura.

Os valores de coeficientes de correlação e custo energético do motor seguiram a mesma tendência para todas as simulações, tendo piores resultados no uso por pessoas de maiores massa e baixa altura e melhores resultados em pessoas de baixa massa e maior altura. Esses resultados são o inverso do gasto energético da pessoa nas simulações em regime permanente.

O aumento da velocidade aumentou os efeitos da altura no custo energético da pessoa para as simulações de corrida energética, tendo pouco efeito nos gastos energéticos do motor ou mesmo nos coeficientes de correlação, que se mantiveram, relativamente, com o mesmo nível de dependência. Ao oposto dos casos anteriores, as simulações mais instáveis neste caso foram as de velocidade baixa em corrida energética.

Com relação a esses resultados, concluí-se que a utilização da cadeira de rodas por pessoas de diferentes estaturas e massas da projetada pode ser feita, pois o controlador aparentemente pôde manter o erro a níveis aceitáveis nas condições de controle ótimo testadas. Pessoas com massas acima da projetada podem ter uma melhoria em relação a pessoa usada no projeto, por necessitar fazer menos força em relação a cadeira de rodas sem assistência, ao custo de maiores forças do motor e erros da malha de velocidade. Com relação a altura, dependendo

da condição de contorno do movimento, a cadeira de rodas pode dificultar mais ou menos o movimento em relação a pessoa usada como base para o projeto.

Em suma, esses resultados demonstram que um único modelo de cadeira de rodas com assistência por impedância pode, com uma pequena redução de eficiência, ser útil para uma faixa de pessoas de diferentes estaturas sem haver a necessidade de reprogramação do sistema de controle.



## 6 CONCLUSÃO

A cadeira de rodas é um dos principais meios de locomoção utilizados por pessoas com deficiência nos membros inferiores, ajudando estas a viverem suas vidas normalmente e independente de terceiros. Infelizmente, esta não é tão eficiente em termos biomecânicos, podendo gerar forças elevadas nos membros superiores da pessoa que podem ocasionar em fadiga muscular.

Meios de assistência foram desenvolvidos para facilitar o uso da cadeira de rodas, e possuem vantagem em relação a cadeira de rodas totalmente automática por manter, em parte, a atividade física da pessoa para se locomover no seu dia a dia. Essas assistências geralmente envolvem a aplicação de uma força motora nas rodas traseiras dependente da força aplicada pela pessoa no aro de propulsão.

Estudou-se neste trabalho o uso do controle de impedância para fazer a cadeira de rodas ter um comportamento dinâmico conforme um modelo de referência o que pode representar uma maneira mais natural de propulsão assistida.

Foi projetado um controlador para o controle de impedância para uma cadeira de rodas em movimento longitudinal. Esse controlador foi testado por controle ótimo usando um modelo para representar o sistema dinâmico cadeira/pessoa, formado por quatro barras articuladas que possuem um vínculo cinemático nas fases de propulsão e são independentes na fase de retorno.

Simplificações no modelo de quatro barras foram exigidas para a definição de uma impedância de referência, principalmente devido a falta de medição dos ângulos dos membros superiores da pessoa. Isso fez com que a dinâmica relativa entre pessoa e cadeira fosse desprezada na resposta em malha fechada, implicando em leves modificações no comportamento da cadeira de rodas sem causar prejuízos em termos de torques aplicados. Tal efeito foi parcialmente estudado nas simulações deste trabalho, que foram feitas com base no método da quadratura gaussiana por pontos de Legendre.

Apesar da complexidade do sistema, um simples controlador PID foi capaz de ser relativamente eficiente na redução dos erros dinâmicos, tendo só mais dificuldades com o aumento excessivo do coeficiente de atrito dinâmico no modelo de referência, onde também há o agravante do aumento das forças do motor aplicadas. Com a variação de parâmetros e condições de contorno diferentes, pôde-se perceber que o PID teve um nível de “robustez” perante mudanças de parâmetros no modelo real.

Como a malha de controle só envolve a velocidade longitudinal da cadeira de rodas, os efeitos da movimentação dos membros superiores da pessoa na fase de retorno são desprezados, comprometendo a dependência nesta fase. Por mais que esse fator ocorresse, o trajeto da mão pelos ciclos foram aproximadamente os mesmos, passando a ideia de que a cadeira de rodas assistida tenha manuseio intuitivo ao usuário por não precisar readaptar toda sua técnica de propulsão para usar a cadeira de rodas assistida de modo eficiente.

Conclui-se que o controle de impedância pode ser uma solução viável para o problema da cadeira de rodas assistida, contanto que os parâmetros do modelo de referência usado sejam bem projetados para o tipo de utilizador, levando em consideração possíveis gastos excessivos no motor em comparação com a efetiva redução de torques articulares da pessoa. As integrações envolvendo escorregamento também deram indícios que esse controlador possa evitá-los ou ao menos amenizá-los o que seria uma vantagem a outros métodos de assistências em malha aberta vistos na literatura.

## 6.1 TRABALHOS FUTUROS

Alguns itens que poderiam ser objeto de estudos futuros:

- a) a aplicação da dinâmica muscular no modelo de quatro barras poderia tornar as forças aplicadas pela pessoa contínuas no tempo, podendo resultar em respostas bem mais próximas da realidade em termos dos torques obtidos;
- b) o desenvolvimento de um modelo para a frenagem da cadeira de rodas é um tópico que poderia ser expandido, pois abriria a oportunidade de testar o controle de impedância no uso de manobras mais complexas e usuais vistas no dia a dia;
- c) o modelo de primeira ordem é capaz de descrever razoavelmente bem o movimento da cadeira de rodas porém, o erro gerado principalmente no ciclo de retorno pode fazer com que a impedância seja ineficiente em atividades muito específicas, tal como algumas feitas neste trabalho. O estudo de um melhor modelo de referência pode ser um caminho para a melhoria desse tipo de assistência;
- d) o modelo de quatro barras é planar, obrigando as análises a serem feitas apenas no plano longitudinal. Tendo isso em vista uma melhoria deste trabalho pode ser a aplicação de um modelo expandido que consiga avaliar como a cadeira de rodas assistida se comportaria em curvas;
- e) outra evolução possível de ser aplicada no modelo é envolver a inclinação da cadeira de rodas. Isso pode ser usado para avaliar condições usuais do dia a dia de um cadeirante como o *wheelie*;
- f) verificar se as informações da posição dos membros superiores da pessoa (admitidos como desconhecidas nesse trabalho) pode ser obtidas utilizando acelerômetros acoplados nos pulsos da pessoa e um filtro de Kalman;

## REFERÊNCIAS

ACKERMANN, Marko et al. Modeling and optimal control formulation for manual wheelchair locomotion: The influence of mass and slope on performance. In: IEEE. 5TH IEEE RAS/EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics. São Paulo: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), ago. 2014. p. 1079–1084. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/BIOROB.2014.6913924>>.

AGUIRRE, Luis Antonio. **Introdução À Identificação De Sistemas - Técnicas Lineares E Não-Lineares Aplicadas A Sistemas Reais (Em Portugese do Brasil)**. [S.l.]: Ufmg, 2007. Disponível em:

<<http://www.amazon.com/Introdu%C3%A7%C3%A3o-Identifica%C3%A7%C3%A3o-Sistemas-N%C3%A3o-Lineares-Portuguese/dp/8570415842%3FSubscriptionId%3D0JYN1NVW651KCA56C102%26tag%3Dtechkie-20%26linkCode%3Dxm2%26camp%3D2025%26creative%3D165953%26creativeASIN%3D8570415842>>.

ALBER. **E-Motion**. [S.l.: s.n.], 2016. Disponível em:

<<https://www.alber.de/en/products/wheelchair-drive/mobility-wheelchair-emotion.html>>. Acesso em: 21 abr. 2016.

ALONSO, Karina Cristina et al. Avaliação cinemática da transferência de paraplégicos da cadeira de rodas. **Acta ortop. bras.**, v. 19, n. 6, p. 346–352, 2011.

ALQAUDI, Bakur et al. Model reference adaptive impedance control for physical human-robot interaction. **Control Theory Technol.**, Springer Science e Business Media, v. 14, n. 1, p. 68–82, fev. 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11768-016-5138-2>>.

AMÂNCIO, Alberto. **Estudo da influência das forças inerciais e das propriedades musculoesqueléticas na propulsão de cadeiras de rodas manuais**. 2016. Diss. (Mestrado) – Centro Universitário FEI, São Bernardo do Campo, São Paulo.

ANAM, Khairul; AL-JUMAILY, Adel Ali. Active exoskeleton control systems: State of the art. **Procedia Engineering**, v. 41, p. 988–994, 2012.

ANDERSON, Rachel. History of the Wheelchair. **Ability Tools Weekly**, out. 2013. Disponível em: <<https://abilitytools.org/blog/history-of-the-wheelchair/>>. Acesso em: 10 abr. 2016.

BETTS, John T. **Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming**. Philadelphia: Siam, 2010. v. 19.

CALVA-YÁÑEZ, María Bárbara et al. Differential Evolution for the Control Gain's Optimal Tuning of a Four-bar Mechanism. en. **Polibits**, scielomx, p. 67–73, jul. 2013. Disponível em:

<[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1870-90442013000100009&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1870-90442013000100009&nrm=iso)>.

CANONICO, Roberto. **Projeto do sistema de controle de uma turbina hidráulica por meio de otimização numérica**. 2014. Diss. (Mestrado) – Centro Universitário FEI, São Bernardo do Campo, São Paulo.

CHUA, J. J. C.; FUSS, F. K.; SUBIC, A. Non-linear rolling friction of a tyre-caster system: analysis of a rugby wheelchair. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications, v. 225, n. 4, p. 1015–1020, abr. 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1243/09544062JMES2485>>.

CHUGO, Daisuke et al. A manual wheelchair assistance system which cancels a gravitational force on a slope. In: 2015 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT). Seville: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), mar. 2015. p. 34–39.

COOPER, R.A. et al. Performance assessment of a pushrim-activated power-assisted wheelchair control system. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 10, n. 1, p. 121–126, 2002.

CRNOSIJA, P.; BIAZIC, T.; KRISHNAN, R. Optimization of PM brushless DC motor drive. In: IEEE International Conference on Industrial Technology, 2003. [S.l.]: Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICIT.2003.1290392>>.

CUERVA, Vinicius Ishimoto. **Wheelchair - Optimal Control Simulation**. [S.l.: s.n.], 2017. <https://github.com/Vinicius-Ishimoto/Wheelchair---Optimal-Control-Simulation>. Acessado em: 12/04/2017.

CUERVA, Vinicius Ishimoto; ACKERMANN, Marko; LEONARDI, Fabrizio. A Comparison of different assistance strategies in power assisted wheelchairs using an optimal control formulation. In: MODELLING, Simulation and Identification IASTED. Campinas, São Paulo: IASTED, out. 2016. p. 97–102.

FINCH, Jacky. World's First Prosthetic: Egyptian Mummy's Fake Toe. **Live Science**, jul. 2007. Disponível em: <<http://www.livescience.com/4555-world-prosthetic-egyptian-mummy-fake-toe.html>>. Acesso em: 10 abr. 2016.

GAGNON, Dany H. et al. Pushrim biomechanical changes with progressive increases in slope during motorized treadmill manual wheelchair propulsion in individuals with spinal cord injury. **Journal of Rehabilitation Research and Development**, Journal of Rehabilitation

Research & Development, v. 51, n. 5, p. 789–802, 2014. Disponível em:  
<<http://dx.doi.org/10.1682/JRRD.2013.07.0168>>.

GARG, Divya et al. Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems using a Radau pseudospectral method. **Computational Optimization and Applications**, Springer Science e Business Media, v. 49, n. 2, p. 335–358, out. 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10589-009-9291-0>>.

GILL, Philip E.; MURRAY, Walter; SAUNDERS, Michael A. SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization. **SIAM Rev.**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 47, n. 1, p. 99–131, jan. 2005. Disponível em:  
<<http://dx.doi.org/10.1137/S0036144504446096>>.

GOLUB, Gene H; WELSCH, John H. Calculation of Gauss quadrature rules. **Mathematics of computation**, v. 23, n. 106, p. 221–230, 1969.

GUILLOIN, Bruno et al. Evaluation of 3 Pushrim-Activated Power-Assisted Wheelchairs in Patients With Spinal Cord Injury. **Archives of physical medicine and rehabilitation**, v. 96, n. 5, p. 894–904, maio 2015.

HEO, Yoon; HONG, Eung-Pyo; MUN, Mu-Seong. Development of power add on drive wheelchair and its evaluation. In: IEEE. 2013 9th Asian Control Conference (ASCC). Istanbul: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), jun. 2013. p. 1–6.

HOGAN, Neville. Impedance control: An approach to manipulation. In: IEEE. AMERICAN Control Conference, 1984. [S.l.: s.n.], 1984. p. 304–313.

HOSSAIN, Mohammad K. et al. Design of a Portable Assisted Mobility Device &#x2014; A sustainable urban transport. In: IEEE. 2013 International Conference on Connected Vehicles and Expo (ICCVE). Las Vegas, NV: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), dez. 2013. p. 818–823.

HUSSAIN, S.; XIE, S. Q.; JAMWAL, P. K. Adaptive Impedance Control of a Robotic Orthosis for Gait Rehabilitation. **IEEE Trans. Cybern.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 43, n. 3, p. 1025–1034, jun. 2013. Disponível em:  
<<http://dx.doi.org/10.1109/TSMCB.2012.2222374>>.

HWANG, Soon-Wook; LEE, Chang-Hyuk; BANG, Young-bong. Power-assisted wheelchair with gravity compensation. In: IEEE. CONTROL, Automation and Systems (ICCAS), 2012 12th International Conference on. JeJu Island: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), out. 2012. p. 1874–1877.

I AM. Wheelchairs Throughout the Years. **Individual Abilities**, set. 2014. Disponível em: <<http://individualabilities.org/blog-posts/wheelchairs-throughout-the-years/>>. Acesso em: 20 jan. 2017.

IBGE. Censo Demográfico: Características gerais da população, religião e pessoas com deficiência. **Rio de Janeiro**, 2010.

\_\_\_\_\_. Censo Demográfico: características gerais da população, religião e pessoas com deficiência. **Rio de Janeiro**, 2000.

KARMAKAR, Amol et al. Evaluation of Pushrim-Activated Power-Assisted Wheelchairs Using ANSI/RESNA Standards. **Archives of Physical Medicine and Rehabilitation**, Elsevier BV, v. 89, n. 6, p. 1191–1198, jun. 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.apmr.2007.10.029>>.

KATSURA, Seiichiro; OHNISHI, Kouhei. Advanced Motion Control for Wheelchair in Unknown Environment. In: 2006 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Taipei: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), out. 2006. p. 4926–4931. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ICSMC.2006.385086>>.

KLOOSTERMAN, M. G. et al. A systematic review on the pros and cons of using a pushrim-activated power-assisted wheelchair. **Clinical Rehabilitation**, v. 27, n. 4, p. 299–313, set. 2013.

KLOOSTERMAN, Marieke G.M. et al. Comparison of shoulder load during power-assisted and purely hand-rim wheelchair propulsion. **Clinical Biomechanics**, v. 27, n. 5, p. 428–435, jun. 2012.

KLOOSTERMAN, Marieke G.M. et al. Effect of power-assisted hand-rim wheelchair propulsion on shoulder load in experienced wheelchair users: A pilot study with an instrumented wheelchair. **Medical Engineering & Physics**, Elsevier BV, v. 37, n. 10, p. 961–968, out. 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.medengphy.2015.07.004>>.

LEE, Jinh; CHANG, Pyung Hun; JAMISOLA, Rodrigo S. Relative Impedance Control for Dual-Arm Robots Performing Asymmetric Bimanual Tasks. **IEEE Trans. Ind. Electron.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 61, n. 7, p. 3786–3796, jul. 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TIE.2013.2266079>>.

LEE, Kyung-min et al. Power-Assisted Wheelchair With Gravity and Friction Compensation. **IEEE Trans. Ind. Electron.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 63, n. 4, p. 2203–2211, abr. 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TIE.2016.2514357>>.

LIAW, Hwee Choo; SHIRINZADEH, Bijan. Robust generalised impedance control of piezo-actuated flexure-based four-bar mechanisms for micro/nano manipulation. **Sensors and Actuators A: Physical**, Elsevier BV, v. 148, n. 2, p. 443–453, dez. 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.sna.2008.09.006>>.

MEDOLA, Fausto O. et al. Conceptual project of a servo-controlled power-assisted wheelchair. In: 5TH IEEE RAS/EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics. São Paulo: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), ago. 2014. p. 450–454.

MIZUTANI, Naoto et al. A wheelchair operation assistance control for a wearable robot using the user's residual function. In: 2013 IEEE 13th International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR). Seattle, WA: Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), jun. 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ICORR.2013.6650465>>.

OH, Sehoon; HORI, Yoichi. Disturbance Attenuation Control for Power-Assist Wheelchair Operation on Slopes. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 22, n. 3, p. 828–837, maio 2014.

\_\_\_\_\_. Human-Friendly Motion Control of Power-Assisted Wheelchair. In: SPRINGER Tracts in Advanced Robotics. [S.l.]: Springer Science e Business Media, 2015. p. 339–369. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-12922-8\\_13](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-12922-8_13)>.

OMS, World Health. World report on disability. World Health Organization, 2011.

PATTERSON, Michael A; RAO, Anil V. GPOPS-II: A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, ACM, v. 41, n. 1, p. 1, 2014.

PAVLIDOU, Efthymia et al. Rolling resistance and propulsion efficiency of manual and power-assisted wheelchairs. **Medical Engineering & Physics**, Elsevier BV, v. 37, n. 11, p. 1105–1110, nov. 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.medengphy.2015.08.012>>.

ROZENDAAL, L.A.; VEEGER, H.E.J.; WOUDE, L.H.V. van der. The push force pattern in manual wheelchair propulsion as a balance between cost and effect. **Journal of Biomechanics**, Elsevier BV, v. 36, n. 2, p. 239–247, fev. 2003. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290\(02\)00320-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9290(02)00320-2)>.

RUTQUIST, Per E; EDVALL, Marcus M. Propt-matlab optimal control software. **Tomlab Optimization Inc**, v. 260, n. 1, 2010.

SAAD, Yousef. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. [S.l.]: Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), jan. 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137%2F1.9780898718003>>.

SHEN, Jie; TANG, Tao; WANG, Li-Lian. **Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications (Springer Series in Computational Mathematics)**. [S.l.]: Springer, 2011. Disponível em: <<http://www.amazon.com/Spectral-Methods-Applications-Computational-Mathematics/dp/354071040X%3FSubscriptionId%3D0JYN1NVW651KCA56C102%26tag%3Dtechie-20%26linkCode%3Dxm2%26camp%3D2025%26creative%3D165953%26creativeASIN%3D354071040X>>.

SHIBATA, Tsuyoshi; MURAKAMI, Toshiyuki. Power-Assist Control of Pushing Task by Repulsive Compliance Control in Electric Wheelchair. **IEEE Trans. Ind. Electron.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 59, n. 1, p. 511–520, jan. 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TIE.2011.2146210>>.

SLACK, Marceline. History of Wheelchairs. **Wheelchair Information**, 2015. Disponível em: <<http://www.wheelchair-information.com/history-of-wheelchairs.html>>. Acesso em: 10 abr. 2016.

SLOWIK, Jonathan S. et al. The influence of speed and grade on wheelchair propulsion hand pattern. **Clinical Biomechanics**, Elsevier BV, v. 30, n. 9, p. 927–932, nov. 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2015.07.007>>.

TSAI, Mi-Ching; HSUEH, Po-Wen. Force sensorless control of power-assisted wheelchair based on motion coordinate transformation. **Mechatronics**, Elsevier BV, v. 23, n. 8, p. 1014–1024, dez. 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechatronics.2013.07.010>>.

WÄCHTER, Andreas; BIEGLER, Lorenz T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical Programming**, Springer Science e Business Media, v. 106, n. 1, p. 25–57, abr. 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10107-004-0559-y>>.

WINTER, David A. **Biomechanics and Motor Control of Human Movement**. [S.l.]: Wiley-Blackwell, set. 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/9780470549148>>.

WIT, C. Canudas de et al. A new model for control of systems with friction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), v. 40, n. 3, p. 419–425, mar. 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109%2F9.376053>>.

WOUDE, L van der et al. Wheelchair racing. **Med Sci Sports Exerc**, v. 20, p. 492–500, 1988.



WOUDE, L.H.V van der et al. Biomechanics and physiology in active manual wheelchair propulsion. **Medical Engineering & Physics**, Elsevier BV, v. 23, n. 10, p. 713–733, dez. 2001. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S1350-4533\(01\)00083-2](http://dx.doi.org/10.1016/S1350-4533(01)00083-2)>.

WOUDE, Lucas H.V. van der; GROOT, Sonja de; JANSSEN, Thomas W.J. Manual wheelchairs: Research and innovation in rehabilitation, sports, daily life and health. **Medical Engineering & Physics**, Elsevier, v. 28, n. 9, p. 905–915, nov. 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.medengphy.2005.12.001>>.

XU, Qingsong. Adaptive Discrete-Time Sliding Mode Impedance Control of a Piezoelectric Microgripper. **IEEE Trans. Robot.**, Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), v. 29, n. 3, p. 663–673, jun. 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TRO.2013.2239554>>.

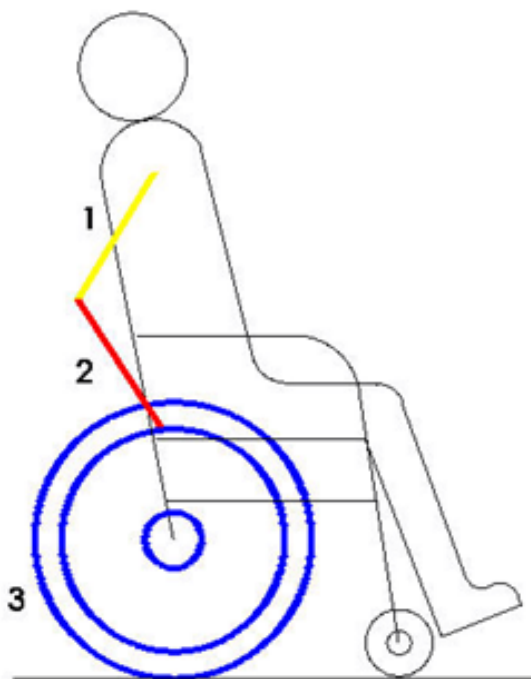
YOUNG, PETER; JAKEMAN, ANTHONY. Refined instrumental variable methods of recursive time-series analysis Part III. Extensions. **International Journal of Control**, Informa UK Limited, v. 31, n. 4, p. 741–764, abr. 1980. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00207178008961080>>.



## **APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE QUATRO BARRAS**

Relembrando o sistema de quatro barras descrito na seção 4.2, a cadeira de rodas pode ser descrita matematicamente, adotando as hipóteses descritas, através de quatro corpos rígidos interligados por juntas rotativas. Na figura 50 está ilustrado o sistema, onde: 1) é o antebraço da pessoa, 2) é o braço da pessoa e 3) são as rodas traseiras de cadeira de rodas.

Figura 50 – Modelo destacando os movimentos de barras do sistema.



Fonte: Autor

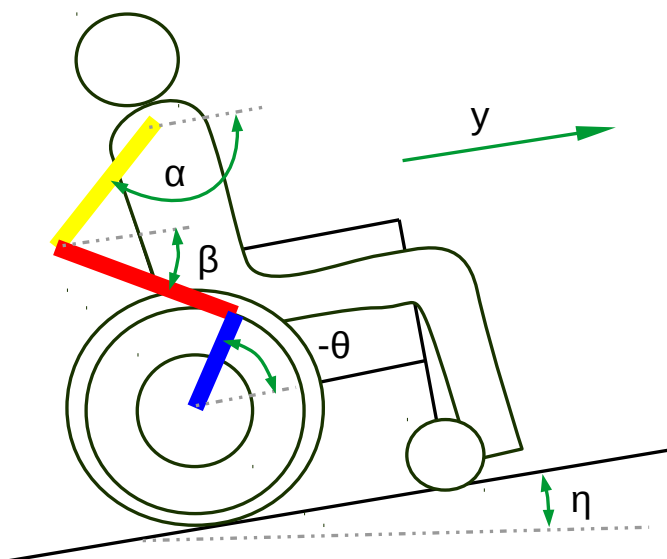
Foi admitido como variáveis generalizadas os três ângulos das barras 1,2 e 3 com a horizontal, ou seja, o sistema mecânico foi escrito sob o seguinte conjunto de variáveis:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (108)$$

Onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta$  podem ser observados na figura 51.

Tendo essa normalização pré-definida, cada corpo foi isolado, tendo suas forças avaliadas usando o teorema do movimento do baricentro Teorema do movimento do baricentro (TMB) e o teorema do momento angular Teorema do momento angular (TMA).

Figura 51 – Modelo de quatro barras com a representação das variáveis generalizadas.

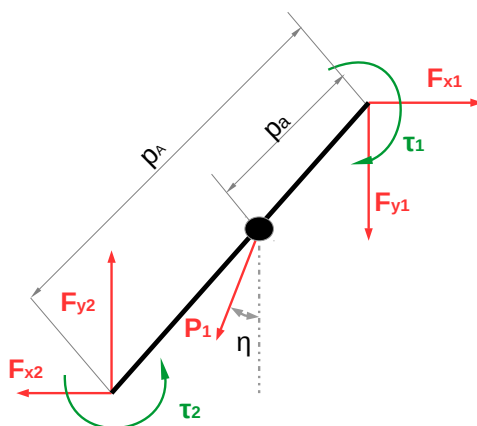


Fonte: Autor

### A.1 ANTEBRAÇO

No antebraço (1 nas figuras 50 e 51) pode se escrever as forças atuantes ilustradas na figura 52 na forma:

Figura 52 – Forças atuantes no antebraço.



Fonte: Autor

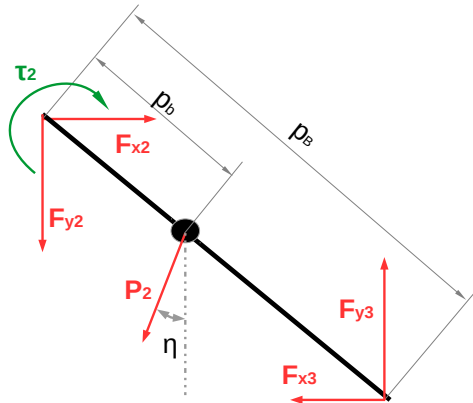
$$\begin{cases} P_1 = m_A \cdot g \\ m_A \cdot \ddot{y}_{Ax} = f_{x1} - f_{x2} - P_1 \cdot \sin \eta \\ m_A \cdot \ddot{y}_{Ay} = f_{x1} + P_1 \cdot \cos \eta - f_{x2} \\ j_A \cdot \ddot{\alpha} = \tau_1 - \tau_2 + p_a(\sin \alpha \cdot f_{x1} - \cos \alpha \cdot f_{y1}) + (p_A - p_a)(\sin \alpha \cdot f_{x2} - \cos \alpha \cdot f_{y2}) \end{cases} \quad (109)$$

Onde:  $m_A$  é a massa do antebraço,  $p_A$  é o tamanho do antebraço,  $p_a$  é a distância do ombro até o centro de gravidade do antebraço,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\tau_i$  os torques aplicados e  $f_{xi}, f_{yi}$  as forças de reação.

## A.2 BRAÇO

No braço (2 nas figuras 50 e 51) pode se escrever as forças atuantes ilustradas na figura 53 na forma:

Figura 53 – Forças atuantes no braço.



Fonte: Autor

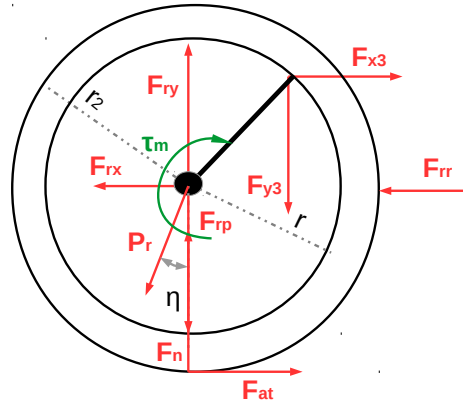
$$\begin{cases} P_2 = m_B \cdot g \\ m_B \cdot \ddot{y}_{Ax} = f_{x2} - f_{x3} - P_2 \cdot \sin \eta \\ m_B \cdot \ddot{y}_{By} = f_{x2} + P_2 \cdot \cos \eta - f_{x3} \\ j_B \cdot \ddot{\beta} = \tau_2 p_b(\sin \beta \cdot f_{x2} - \cos \beta \cdot f_{y2}) + (p_B - p_b)(\sin \beta \cdot f_{x3} - \cos \beta \cdot f_{y3}) \end{cases} \quad (110)$$

Onde:  $m_B$  é a massa do braço,  $p_B$  é o tamanho do braço,  $p_b$  é a distância do cotovelo até o centro de gravidade do braço,  $\tau_i$  os torques aplicados e  $f_{xi}, f_{yi}$  as forças de reação.

### A.3 RODAS TRASEIRAS

Analogamente aos itens anteriores, é mostrado na figura 54 as forças atuantes na cadeira de rodas e seque a isso o equacionamento dessas forças.

Figura 54 – Forças atuantes nas rodas traseiras da cadeira.



Fonte: Autor

$$\begin{cases} P_r = m_r \cdot g \\ m_r \cdot \ddot{y}_{rx} = f_{x3} + f_{at} - f_{rx} - f_{rr} - P_r \cdot \sin \eta - b \cdot \dot{y}_{rx} \\ 0 = P_r \cdot \cos \eta - f_N + f_{rp} - f_{ry} \\ j_r \cdot \ddot{\theta} = -r_2(\sin \theta \cdot f_{x3} - \cos \theta \cdot f_{y3}) - r \cdot f_{at} + \tau_m \end{cases} \quad (111)$$

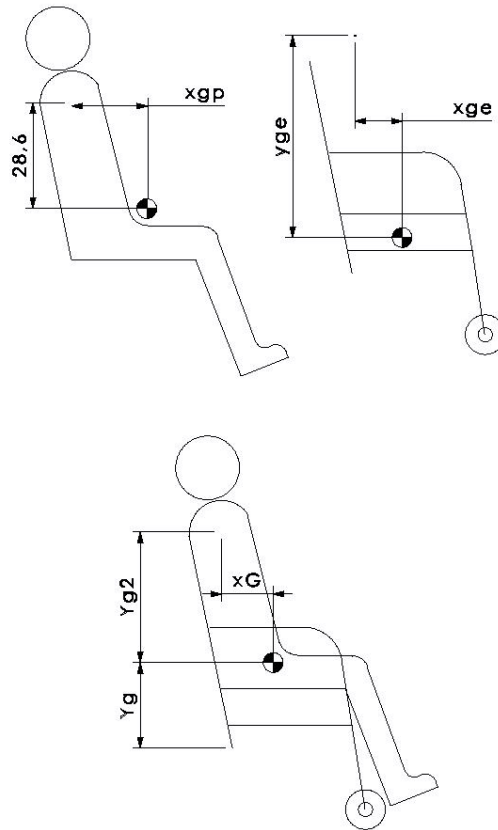
Onde:  $m_r$  é a massa das rodas traseiras,  $f_{at}$  a força de atrito,  $f_{rx}$  e  $f_{ry}$  forças de reação com a estrutura da cadeira,  $f_{rp}$  força de contato com a pessoa,  $f_{rr}$  força de resistência ao rolamento,  $f_N$  força normal com o piso e  $j_r$  a inércia da roda.  $\tau_m$  é o torque aplicado pelo motor e  $b$  o coeficiente linear de atrito dinâmico, sendo constituído tanto pelos atritos presentes no motor quanto pela cadeira de rodas em si.

### A.4 ESTRUTURA E PESSOA

Para simplificação, foi considerado que as partes do corpo da pessoa que movem junto com a cadeira de rodas (tronco e pernas) e as partes da estrutura não rolantes fazem parte de uma única inércia que se move linearmente.

A localização do centro de massa desse sistema pode ser calculado como uma simples média ponderada entre as massas da pessoa e da estrutura e a massa final  $m_s$  é simplesmente a soma das duas partes.

Figura 55 – Inércia combinada da estrutura da cadeira de rodas com as partes paradas da pessoa.



Fonte: Autor

Esse sistema funciona como um simples bloco de massa  $m_s$  puxado pela força de reação com a roda  $f_{rx}$  e sofrendo reação da força longitudinal aplicada pelo cotovelo da pessoa  $f_{x1}$  resultando em apenas uma equação dinâmica na forma:

$$\{ m_s \cdot \ddot{y}_{sx} = f_{rx} - f_{x1} \quad (112)$$

Agrupando todas as equações dinâmicas (desprezando as estacionárias), pode-se escrever o sistema dinâmico no formato:

$$\mathbf{M}^{(e)} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} = \mathbf{k}_e^{(e)} \quad (113)$$

Onde:



$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} m_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_r \end{bmatrix} \quad (114)$$

Representa a matriz de massa do sistema e  $\mathbf{k}_e^{(e)}$  o vetor de forças atuantes. Tal vetor, pode ser subdividido pela soma de dois termos: uma com as forças internas de interação entre os corpos do sistema e outra com as forças externas atuantes sob o mesmo, formando assim os vetores:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e^{(e)} &= \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_v \\ &= \begin{bmatrix} -P_1 \cdot \sin \eta \\ P_1 \cdot \cos \eta \\ -f_{x3} - P_2 \cdot \sin \eta \\ P_2 \cdot \cos \eta - f_{y3} \\ f_{x3} - f_{rr} - b \cdot r \cdot \dot{\theta} \\ 0 \\ \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_2 - (p_B - p_b)(\sin \beta \cdot f_{x3} - \cos \beta \cdot f_{y3}) \\ -r_2(\sin \theta \cdot f_{x3} - \cos \theta \cdot f_{y3}) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} f_{x1} - f_{x2} \\ f_{y1} - f_{y2} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{at} - f_{rx} \\ f_{rx} - f_{x1} \\ p_a(\sin \alpha \cdot f_{x1} - \cos \alpha \cdot f_{y1}) + (p_A - p_a)(\sin \alpha \cdot f_{x2} - \cos \alpha \cdot f_{y2}) \\ p_b(\sin \beta \cdot f_{x2} - \cos \beta \cdot f_{y2}) \\ -r \cdot f_{at} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (115)$$

Onde  $\mathbf{f}_e$  são as forças externas aplicadas sob o sistema da cadeira de rodas e  $\mathbf{f}_v$  são as forças vinculares devido a interação entre os corpos no sistema. O índice superior  $e$  representa a notação explícita, com todas as variáveis dinâmicas independentes entre si.

Esse conjunto de equações ao todo possui 9 variáveis, tidas pelo vetor de acelerações  $\ddot{\mathbf{q}}^{(e)}$  na equação 113. Esse numero de incógnitas deve ser reduzido às variáveis generalizadas 108. Tal processo é feito se definido uma matriz jacobiana no formato:

$$\mathbf{J} = \frac{\delta \mathbf{q}^{(e)}}{\delta \mathbf{q}} \quad (116)$$

O primeiro processo para se obter a matriz jacobiana na equação 116 é escrever o vetor de deslocamentos em função das variáveis generalizadas:

$$\begin{bmatrix} y_{Ax} \\ y_{Ay} \\ y_{Bx} \\ y_{By} \\ y_{Cx} \\ y_{sx} \\ \alpha \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \cdot r + a \cdot \cos \alpha \\ p_a \sin \alpha \\ \theta \cdot r + p_A \cos \alpha + p_b \cos \beta \\ p_A \sin \alpha + p_b \sin \beta \\ \theta r + p_d \\ \theta r + y_G \\ \alpha \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (117)$$

Derivando pelo tempo o conjunto de equações 117, pode-se escrever a matriz jacobiana no formato:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{Ax} \\ \dot{y}_{Ay} \\ \dot{y}_{Bx} \\ \dot{y}_{By} \\ \dot{y}_{Cx} \\ \dot{y}_{sx} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_a \sin \alpha & 0 & r \\ p_a \cos \alpha & 0 & 0 \\ -p_A \sin \alpha & -p_b \sin \beta & r \\ p_A \cos \alpha & p_b \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (118)$$

A matriz formada entre a derivada dos deslocamentos e das coordenadas generalizadas é a matriz jacobiana definida na equação 116 e descreve como que as acelerações do sistema expandido variam em função das variáveis generalizadas.

Segundo o formalismo de Newton-Euler, o sistema matricial descrita pela equação 113 pode ser escrito sob apenas o sistema de variáveis generalizadas se resolver a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{M}^{(e)} \cdot \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{M}^{(e)} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{f}_e \quad (119)$$

Esse sistema matricial é bem parecido com o da equação 113, apenas tendo uma matriz extra referente as forças generalizadas e de Coriolis. Aplicando a matriz jacobiana calculada em 118 sob o sistema matricial 113 conforme a equação 119 resulta em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} = \mathbf{k}_e \quad (120)$$

Onde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_B \cdot p_A^2 + m_A \cdot p_a^2 + j_A & p_A \cdot p_b \cdot m_B \cos(\alpha - \beta) & r \sin \alpha (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) \\ p_A \cdot p_b \cdot m_B \cos(\alpha - \beta) & m_B \cdot p_B^2 + j & -r \cdot p_b \cdot m_B \sin \beta \\ -r \sin \alpha (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) & -r \cdot p_b \cdot m_B \sin \beta & j_R + r^2(m_A + m_B + m_r + m_s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} p_A \cdot p_b \cdot \dot{\beta}^2 \cdot m_B \sin(\alpha - \beta) \\ -p_A \cdot p_b \dot{\alpha}^2 \cdot m_B \sin(\alpha - \beta) \\ -r \cdot p_b \cdot m_B \cdot \dot{\beta}^2 \cos \beta - \dot{\alpha}^2 \cdot r \cos \alpha (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \tau_1 - \tau_2 + p_A(\dot{f}_{x3} \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \dot{f}_{y3}) + p_A \cos(\alpha - \eta) m_B \cdot g + p_a \cdot m_A \cdot g \cos(\alpha - \eta) \\ \tau_2 + p_B(\dot{f}_{x3} \sin \beta - \dot{f}_{y3} \cos \beta) + p_b \cdot m_B \cdot g \cos(\beta - \eta) \\ \tau_m - f_{rr}r - r(m_A + m_B + m_r) \cdot g \cdot \sin \eta + r_2(\dot{f}_{y3} \cos \theta - \dot{f}_{x3} \sin \theta) - r^2 \cdot b \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Esse sistema matricial pode ser subdividido em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} \dot{f}_{x3} \\ \dot{f}_{y3} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\text{t}} \end{bmatrix} \quad (121)$$

onde:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} p_A \cdot \sin \alpha & -p_A \cdot \cos \alpha \\ p_B \cdot \sin \beta & -p_B \cdot \cos \beta \\ -r_2 \cdot \sin \theta & r_2 \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & p_A \cdot p_b \cdot m_B \sin(\alpha - \beta) \\ -p_A \cdot p_b \cdot m_B \sin(\alpha - \beta) & 0 \\ -r \cos \alpha (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) & -r \cdot p_b \cdot m_B \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) \cdot g \cdot \cos(\alpha - \eta) \\ p_b \cdot g \cdot m_B \cos(\beta - \eta) \\ -r(m_A + m_B + m_r) \cdot g \cdot \sin \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_{rr}r - r^2 \cdot b \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

e  $\tau_{\text{t}}$  é o torque aplicado pelo motor elétrico.

A matriz de massa do sistema de quatro barras com motor é bem parecida com a do modelo puro, tendo só o acréscimo da inércia do motor no último termo da matriz  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} m_B p_A^2 + m_A p_a^2 + j_A & p_A \cdot p_b \cdot m_B \cos(\alpha - \beta) & r \sin \alpha (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) \\ p_A \cdot p_b \cdot m_B \cos(\alpha - \beta) & m_B \cdot p_B^2 + j & -r \cdot p_b \cdot m_B \sin \beta \\ -r \sin \alpha (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) & -r \cdot p_b \cdot m_B \sin \beta & j_R + j_t + r^2 (m_A + m_B + m_r + m_s) \end{bmatrix} \quad (122)$$

Forças resistivas dinâmicas, como o atrito dinâmico do motor podem ser inseridas na função auxiliar  $\mathbf{k}_r$ , resultando em:

$$\mathbf{k}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_{rr} r - r^2 \cdot b_{eq} \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (123)$$

onde:  $b_{eq} = b + b_t$  é o coeficiente de atrito dinâmico longitudinal equivalente da cadeira de rodas assistida.

#### A.5 MODELO COM ESCORREGAMENTO

A velocidade angular das rodas da cadeira e a velocidade longitudinal podem ser separadas simplificando o sistema de equações 113 usando como jacobiana a matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{Ax} \\ \dot{y}_{Ay} \\ \dot{y}_{Bx} \\ \dot{y}_{By} \\ \dot{y}_{Cx} \\ \dot{y}_{sx} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_a \sin \alpha & 0 & 0 & 1 \\ p_a \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -p_A \sin \alpha & -p_b \sin \beta & 0 & 1 \\ p_A \cos \alpha & p_b \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{y}_{real} \end{bmatrix} \quad (124)$$

Neste caso, o sistema matricial da cadeira de rodas é reduzido a um sistema de quatro equações, com variáveis generalizadas:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \\ y_{real} \end{bmatrix} \quad (125)$$

Que resulta em um sistema matricial similar ao caso anterior:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_1 \cdot \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_r - \mathbf{K}_3 \cdot \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_t \end{bmatrix} \quad (126)$$

com:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & m_{1,4} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & 0 & m_{2,4} \\ 0 & 0 & j_t & 0 \\ m_{1,4} & m_{2,4} & 0 & m_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$m_{1,1} = m_B \cdot p_A^2 + m_A \cdot p_a^2 + j_A$$

$$m_{1,2} = p_A \cdot p_b \cdot m_B \cdot \cos \alpha - \beta$$

$$m_{1,4} = -\sin \alpha \cdot (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A)$$

$$m_{2,2} = m_B \cdot p_b^2 + j_B$$

$$m_{2,4} = -p_b \cdot m_B \cdot \sin \beta$$

$$m_{4,4} = m_A + m_B + m_r + m_w$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} p_A \cdot \sin \alpha & -p_A \cdot \cos \alpha \\ p_B \cdot \sin \beta & -p_B \cdot \cos \beta \\ -r_2 \cdot \sin \theta & r_2 \cdot \cos \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & p_A \cdot p_b \cdot m_B \sin(\alpha - \beta) \\ -p_A \cdot p_b \cdot m_B \sin(\alpha - \beta) & 0 \\ 0 & 0 \\ -\cos \alpha (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) & -p_b \cdot m_B \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} (p_A \cdot m_B + p_a \cdot m_A) \cdot g \cdot \cos(\alpha - \eta) \\ p_b \cdot g \cdot m_B \cos(\beta - \eta) \\ 0 \\ -(m_A + m_B + m_r) \cdot g \cdot \sin \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \cdot f_{at} \\ -f_{rr} - b \cdot \dot{y}_{real} + f_{at} \end{bmatrix}$$

Representando a cadeira de rodas dessa forma resulta na criação de uma força extra de interação entre  $\theta$  e  $y_{real}$ , tida pela força de atrito das rodas traseiras com o solo ( $f_{at}$ ). Essa força pode ser obtida utilizando algum modelo de atrito.



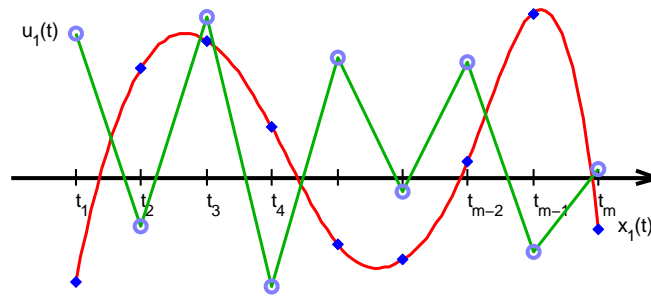
## **APÊNDICE B – QUADRATURA DE LEGENDRE-GAUSS**

Considerando uma vetorização pelo tempo no formato:

$$\mathbf{t} = [t_0 = t_1, t_2, t_3, \dots, t_{\delta-1}, t_{\delta} = t_f]^T \quad (127)$$

Os estados e controles podem ser considerados como funções contínuas e descontínuas respectivamente, descritas por valores exatos nos pontos discretos definidos pelo vetor (127), conforme a figura.

Figura 56 – Discretização temporal de um estado e controle típico



Fonte: Autor

Tendo os pontos discretos sob o vetor de tempo, a função dos estados pode ser aproximada por uma função polinomial, como a do polinômio de Lagrange:

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{i=1}^{\delta} x(t_i) \prod_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{\delta} \frac{t - t_k}{t_i - t_k} \quad (128)$$

Quando o tempo final e inicial é desconhecido, é interessante de descrever discretização temporal, em função de apenas esses dois valores extremos. Isso pode ser feito declarando uma mudança de variável:

$$\mathbf{t} = \frac{t_f - t_o}{2} \boldsymbol{\tau} + \frac{t_f + t_o}{2} \quad (129)$$

Onde  $t_o$  e  $t_f$  são os tempos finais e iniciais, ambos desconhecidos e  $\boldsymbol{\tau}$  é a nova variável vetorizada que é independente de outros parâmetros.

Esta nova variável é definida entre  $[-1,1]$  em ordem crescente e possui tantos pontos quanto a quantidade de pontos de colocação  $m$ . Se o número de pontos de colocação são diferentes da discretização, o extremo faltante é incluído de modo que:



$$\mathbf{t} = [t_o = t_1(-1), t_2(\tau_1), t_3(\tau_2), \dots, t_\delta(1) = t_f]^T \quad (130)$$

e

$$-1 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < 1$$

Resolvendo o polinômio de Lagrange (128) em função do vetor  $\tau$  ao invés do tempo, resulta:

$$\mathcal{L}(\tau) = \sum_{i=1}^{\delta} x(t_i) \prod_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{\delta} \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_k} \quad (131)$$

A derivada da função dos estados pode ser aproximada derivando o polinômio aproximado sob cada ponto de colocação  $m$  obtendo:

$$\dot{x}(\tau_{\mathfrak{z}}) \approx \sum_{i=1}^{\delta} x(t_i) \cdot \sum_{\substack{l \neq i \\ l=1}}^{\delta} \frac{1}{\tau_i - \tau_l} \cdot \prod_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{\delta} \frac{\tau_{\mathfrak{z}} - \tau_k}{\tau_i - \tau_k} = \sum_{i=1}^{\delta} \mathcal{D}_{\mathfrak{z}i} \cdot x(t_i) \quad \text{para: } \mathfrak{z} = 1, 2, 3, \dots, m \quad (132)$$

Sendo  $\mathcal{D}$  uma matriz com o número de linhas igual ao de pontos de colocação (pontos discretos onde a condição dinâmica é verificada) e número de colunas igual a quantidade de pontos discretos  $\delta$ . A vantagem de se fazer tal discretização sob o vetor  $\tau$  ao invés do tempo é que a matriz de diferenciação se torna constante e independente dos parâmetros a serem otimizados.

A função 132 tal como a matriz de diferenciação  $\mathcal{D}$  representa o valor da derivada do polinômio no tempo  $t_{\mathfrak{z}}$  usado para aproximar a função de derivada dos estados, desconhecida *a priori*.

Para escrever as restrições dinâmicas (7) é necessário fazer a compatibilidade em função do tempo, isso é facilmente obtido fazendo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{t_f - t_o} \mathcal{D}$$

Assim, reescrevendo as restrições dinâmicas (7) para cada um dos estados em função da aproximação polinomial como:

$$\mathcal{D}\mathbf{x}_i = \frac{t_f - t_o}{2} \Omega_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \quad \text{para: } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (133)$$

Observando a derivada do polinômio de Lagrange (132), percebe-se que cada ponto de colocação testado usando a fórmula 133 é dependente de todos os pontos discretos do estado analisado, isso gera uma matriz de diferenciação cheia o que pode ser custoso no cálculo da jacobiana das restrições.

Uma maneira de reduzir o números de termos não zero da matriz de diferenciação é criar uma malha no tempo formada por polinômios de menor ordem. Assim, cria-se um outro vetor temporal  $\mathbf{t}^*$ :

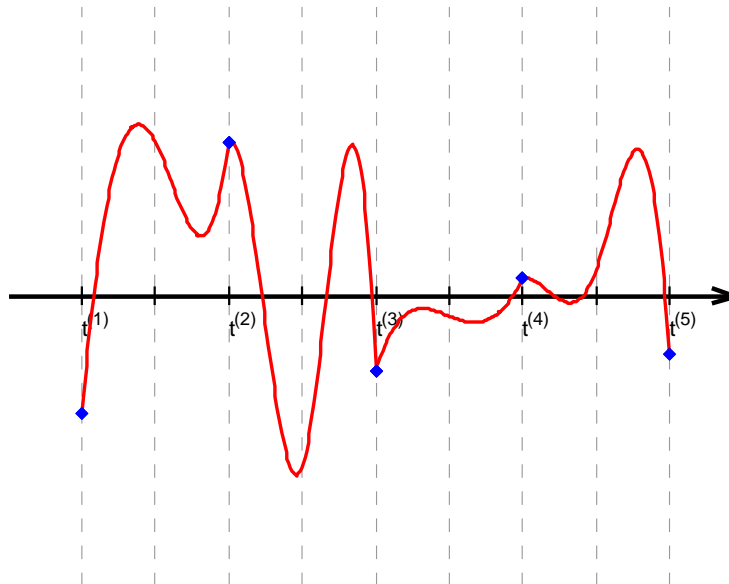
$$\mathbf{t}^* = [t_o = t^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(q-1)}, t^{(q)} = t_f]^T \quad (134)$$

onde :

$$q < 3\delta$$

Para cada intervalo  $t^{(i)} - t^{(i-1)}$  no vetor temporal (134) se aplica a mudança de variável para o cálculo dos pontos intermediários de modo que  $t(-1) = t^{(i-1)}$  e  $t(1) = t^{(i)}$ . Isso resulta em uma aproximação dos estados por vários polinômios de menor ordem, interligados nos pontos  $\mathbf{t}^*$ , onde há a presença de descontinuidades.

Figura 57 – Exemplo de aproximação polinomial por vários polinômios de menor ordem



Fonte: Autor

Desta maneira, a matriz de diferenciação  $\mathcal{D}$  é formada pela concatenação de  $q$  matrizes menores, o que reduz bem o número de termos não nulos e torna as simulações muito mais rápidas em comparação ao uso de um polinômio único por todos os pontos discretos. As descontinuidades formadas por essa segmentação não causa problemas se a discretização for boa o suficiente.

Tal como na mudança de variável (129), é conveniente escrever o vetor de malhas temporais  $t^*$  em termos de outros parâmetros similares ao da equação 129:

$$\mathbf{t}^* = \frac{t_f - t_o}{2} \gamma + \frac{t_f + t_o}{2} \quad (135)$$

A equação matricial 133 cria  $n \cdot m$  restrições dinâmicas, que garantem a continuidade entre as variáveis e uma aproximação do problema contínuo tratado pelo método indireto. Uma propriedade da matriz de derivação é (GARG et al., 2009):

$$\mathcal{I} = \mathcal{D}_{1:l,2:m}^{-1} \quad (136)$$

$\mathcal{I}$  é a matriz de integração do polinômio de Lagrange sobre os pontos discretos. Essa matriz permite calcular as restrições dinâmicas de uma outra forma:

$$\mathbf{x}_{2:l}^{(j)} - \mathbf{x}_1^{(j)} - \frac{t_f - t_o}{4} (\gamma^{(j+1)} - \gamma^{(j)}) \cdot \mathcal{I} \cdot \Omega(\mathbf{z}) = 0 \quad (137)$$

para cada malha  $j = 1, 2, 3, \dots, q$  e para cada estado.

A equação 137 integra a resposta das funções dinâmicas através da matriz de integração  $\mathcal{I}$ , permitindo a comparação direta com a diferença dos estados.

Para cada malha  $i = 1, 2, 3, \dots, q$ , a restrição dinâmica de derivação atualizada pode ser calculada por:

$$\mathcal{D}\mathbf{x}^{(i)} = \frac{t_f - t_o}{4} (\gamma^{(j+1)} - \gamma^{(j)}) \Omega(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \quad (138)$$

para cada estado.

Algumas funções objetivos tidas nesse trabalho envolvem o cálculo de integrais em função da discretização no tempo das variáveis de estado e controles. O cálculo exato da integral de um polinômio  $p(t)$  de ordem até  $2\vartheta - 1$  pode ser obtido aplicando uma quadratura gaussiana no formato:

$$\int_{-1}^1 p(t) dt \approx \sum_{i=1}^{\vartheta} w_i \cdot p(t_i) \quad (139)$$

Onde os pontos usados para avaliar a função são as raízes de um polinômio da classe de polinômios ortogonais.

Um tipo bem usual de classe de polinômios ortogonais são os polinômios de Legendre, resultantes da função:

$$\mathfrak{P}_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - 2 \cdot t \cdot z + t^2)^{1/2} \cdot t^{-(l+1)} dt \quad (140)$$

Definido simetricamente entre  $[-1, 1]$ .  $l$  é a ordem do polinômio de Legendre.

Existem ao menos três maneiras diferentes de quadraturas gaussianas por Polinômios de Legendre:

- a) O método gaussiano onde os pontos de colocação são simétricos em relação a origem. O primeiro ponto referente a  $t_o$  não é um ponto colocado e o último é calculado pela própria regra da quadratura;
- b) O método de Radau onde os pontos de colocação não são simétricos em relação a origem por possuir uma raiz no extremo inferior (referente a  $t_o$ ) que é colocada. Neste caso, o último ponto referente a  $t_f$  é um ponto discreto não colocado;

- c) O método de Lobatto onde todos os pontos são colocados inclusive as extremidades referentes a  $t_0$  e  $t_l$ ;

Esses três métodos possuem ligeiras variações no polinômio de Legendre a ser calculado para obtenção de suas raízes  $\tau_i$ . Uma discussão profunda sobre a funcionalidade dos três métodos pode ser encontrada em Garg et al. (2009).

Para o cálculo das raízes do polinômio de Legendre  $\mathfrak{P}(\tau)$  de ordem  $l$ , existe uma maneira mais simplificada que não exige a direta resolução da equação 140. Esse método envolve a obtenção dos alto valores da matriz jacobiana (SHEN; TANG; WANG, 2011):

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & & & \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{b_{l-1}} & a_{l-1} & \sqrt{b_l} \\ & & & & \sqrt{b_l} & a_{l-1} \end{bmatrix} \quad (141)$$

Os índices  $a$  e  $b$  dependem do método a ser utilizado na quadratura. Esses índices foram obtidos por:

$$\begin{cases} a_i = 0, & b_i = \frac{i^2}{4i^2-1}, & \text{Para: Gauss, } i = 1, 2, 3, \dots, l \\ a_i = \frac{1}{(2 \cdot i + 1) \cdot (2 \cdot i + 3)}, & b_i = \frac{i \cdot (i + 1)}{(2 \cdot i + 1)^2}, & \text{Para: Radau } i = 1, 2, 3, \dots, l - 1 \\ a_i = 0, & b_i = \frac{i \cdot (i + 2)}{(2 \cdot i + 1) \cdot (2 \cdot i + 3)}, & \text{Para: Lobatto } i = 1, 2, 3, \dots, l - 2 \end{cases} \quad (142)$$

Vale lembrar que para o método de Radau  $\tau_1 = -1$  e para o método de Lobatto  $\tau_1 = -1$  e  $\tau_l = 1$ .

Os auto valores da matriz jacobiana em 141 são uma aproximação das raízes do Polinômio de Legendre 140 verdadeira principalmente para o caso onde a ordem  $l$  não é muito elevada. Como o algoritmo utilizado faz uso de uma malha simplificada, é garantido que a ordem de cada malha não será muito elevada podendo usar o método descrito.

Os pesos de integração desses pontos podem então ser obtidos por:

$$\begin{cases} w_i = \frac{2}{(1-\tau_i^2) \cdot [\mathfrak{P}'_{l+1}(\tau_i)]^2} & \text{Para: Gauss } i = 1, 2, 3, \dots, l \\ w_i = \frac{1-\tau_i}{(l+1)^2 \cdot [\mathfrak{P}_l(\tau_i)]^2} & \text{Para: Radau } i = 1, 2, 3, \dots, l \\ w_i = \frac{2}{l \cdot (l+1) \cdot [\mathfrak{P}_l(\tau_i)]^2} & \text{Para: Lobatto } i = 1, 2, 3, \dots, l \end{cases} \quad (143)$$

$\mathfrak{P}$  e  $\mathfrak{P}'$  pode ser calculados por:

$$\mathfrak{P}_N(\tau) = \frac{1}{2^N} \sum_{i=0}^{N/2} (-1)^i \frac{(2N-2i)!}{2^N i!(N-i)!(N-2i)!} x^{N-2i} \quad (144a)$$

$$\mathfrak{P}'_N(\tau) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+N, \text{ impar}}}^{N-2} (2k+1) \mathfrak{P}_k(\tau) \quad (144b)$$

Para o caso do uso de malhas, a quadratura 139 se torna uma somatória de menores integrais tal como em:

$$\int_{t_o}^{t_f} f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^q \frac{t^{(j+1)} - t^{(j)}}{2} \cdot \sum_{i=1}^l w_i \cdot f(\tau_i) \quad (145)$$

ou em termos da variável de malha  $\gamma$ :

$$\int_{t_o}^{t_f} f(\tau) d\tau \approx \frac{t_f - t_o}{4} \sum_{j=1}^q (\gamma^{(j+1)} - \gamma^{(j)}) \cdot \sum_{i=1}^l w_i \cdot f(\tau_i) \quad (146)$$

A discretização da malha  $t^*$  não necessita de pontos específicos, podendo ser qualquer um no domínio  $[-1,1]$ . Uma fórmula decente de discretização que foi utilizada no trabalho é a da ponderação de Chebyshev-Gauss:

$$\gamma^{(j)} = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2q} \quad (147)$$

Essa ponderação é bem refinada nos extremos e mais espaçada no centro, isso é interessante pois grande parte das simulações precisam de refino em tais regiões.

Com os pontos  $\tau$  calculados pelos auto valores da matriz 141 e com as malhas previamente definidas, se calcula a matriz de diferenciação  $\mathcal{D}$  ou a de integração  $\mathcal{I}$  dependendo das restrições dinâmicas utilizadas. Para a função objetivo, se utiliza a regra da quadratura da função 146 com os pesos calculados por (143).

Neste trabalho, foi utilizado o método de Radau pela falta de necessidade de cálculo do último ponto discreto, o que seria necessário com o método puro de Gauss, e não possuir dificuldades de convergência como é com o método de Lobatto, que possui matriz de diferenciação singular (GARG et al., 2009).

## B.1 CÁLCULO DO ERRO DE MALHA

Para uma melhor análise das simulações que foram feitas, é interessante de se avaliar o erro global e local da malha de pontos de colocação criada por algum método geral e único. Para isso, foi utilização uma formulação para a verificação do erro de malha que usa como base o conjunto de funções 148 (BETTS, 2010):

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{i,(k)} = \int_{t^{(k)}}^{t^{(k+1)}} |\varepsilon_{i,(k)}(t)| dt \\ \varepsilon(t) = \dot{\tilde{y}}(t) - \mathbf{\Omega} \tilde{x}_i(t), \tilde{u}_j(t), t \\ \bar{\varepsilon}_{(k)} \approx \max_{i,(k)} \frac{\eta_{i,(k)}}{w_i + 1} \\ w_i = \max[|\dot{\tilde{y}}_{i,(k)}|, |\dot{\tilde{y}}_{i,(k)}|] \end{array} \right. \quad (148)$$

Onde  $\bar{\varepsilon}_{(k)}$  é o erro no intervalo  $k$  definido entre os pontos de colocações,  $\tilde{x}_i$  e  $\tilde{u}_j$  é uma aproximação do estado  $i$  e do controle  $j$ , obtida por algum método de interpolação e  $\Omega$  é o lado direito da ODE definida anteriormente.

Para o cálculo da integral do erro  $\eta_{i,(k)}$  definida a cada ponto de colocação e estado, será utilizado o método de quadratura de Gauss (GOLUB; WELSCH, 1969):

$$\int_{t^{(k)}}^{t^{(k+1)}} \left| \varepsilon_{i,(k)}(t) \right| dt \approx \frac{t^{(k+1)} - t^{(k)}}{2} \sum_{i=1}^{N(k)} \omega_i \left| \varepsilon_i \left( \frac{t^{(k+1)} - t^{(k)}}{2} \kappa + \frac{t^{(k+1)} + t^{(k)}}{2} \right) \right| \quad (149)$$

Sendo  $\omega_i$  os pesos dos pontos  $i = 1 \dots N_k$  extras dispostos entre  $[t_k, t_{k+1})$  para todos os intervalos entre pontos de colocação e  $\kappa$  os 5 pontos da quadratura utilizados entre os intervalos de colocação. Os termos  $\tilde{x}_i$ , sua derivada e  $\tilde{u}_j$  foram obtidos através de interpolações por *splines* cúbicas e interpolação linear respectivamente.

## **APÊNDICE C – DETALHES COMPUTACIONAIS**

Tabela 36 – Dados do computador utilizado

Processador	Intel R Xeon R de 2,00 GHz (2 processadores)
Memória instalada (RAM)	16 GB
Tipo de sistema	Sistema operacional de 64 Bits
Sistema operacional	Windows 7 Enterprise Service Pack1

Fonte: Autor.

Todas as simulações dessa dissertação foram feitas utilizando um computador disponibilizado aos alunos no Centro Universitário FEI. Este computador possui as seguintes características:

Os programas foram executados no *software* MATLAB<sup>®</sup> versão R2014a utilizando classes com base na teoria de diferenciação automática desenvolvida na fundamentação teórica. O conversor do problema dinâmico em um algébrico utiliza a quadratura de Legendre-Gauss descrita melhor no apêndice B.

Todos os códigos utilizados estão sendo mantidos em Cuerva (2017) para download na plataforma GitHub sob o nome de *Wheelchair - Optimal Control Simulation*.